Dreidimensional abbildende Elektronenmikroskope
II. Theorie elektronenoptischer Systeme mit gekrümmter Achse

E. Plies * und D. Typke

Max-Planck-Institut für Biochemie, Abteilung für Strukturforschung I,
Martinsried bei München, West-Germany

Z. Naturforsch. **33a**, 1361–1377 (1978); eingegangen am 6. August 1978

Three-dimensionally Imaging Electron Microscopes
II. Theory of Electron-optical Systems with a Curved Axis

An imaging and aberration theory of electron- or ion-optical systems composed of arbitrary stationary electromagnetic fields without space charges and currents in the beam-occupied region is developed. It follows the theory of systems with a straight optical axis as formulated by H. Rose. The electromagnetic field is expanded into plane multipoles about the arbitrarily curved and twisted axis. In the expansion of the eikonal, all terms are given which are needed for the calculation of the image aberrations up to the third rank (rank = Seidelian order + power of disturbing potentials + power of the chromatic deviation). For the image aberrations of the second rank, an integral expression is given, from which the single aberration integrals may be derived. Systems with single-section symmetry are treated in more detail.

1. Einleitung

In Teil I dieser Arbeit [1] wurde von W. Hoppe für die dreidimensionale Elektronenmikroskopie eine neue Art von Geräten vorgeschlagen, in denen ein feststehendes Objekt unter vielen verschiedenen Richtungen in einem möglichst großen Winkelbereich durchstrahlt und abgebildet wird. Für die Realisierung eines solchen „dreidimensional abbildenden Elektronenmikroskops" wurden sowohl rotationssymmetrische als auch nicht-rotationssymmetrische Elemente diskutiert. Besonders interessant erscheinen rotationssymmetrische Systeme mit außeraxialem Strahlengang und Ringzonensegment-Abbildung. Das Prinzip dieser speziellen Elemente wurde in [1, 2] diskutiert. Einige Ergebnisse von genaueren rechnerischen Untersuchungen der optischen Eigenschaften wurden mit Hilfe numerischer Bahnintegration (ray tracing) für kernfreie magnetische Objekte in [3–5] und für elektrostatische Linsen mit Kern in [6] mitgeteilt. Die magnetischen Objektive können als supraleitende Abschirmlinsen [7–9] realisiert werden. Eine ausführlichere Veröffentlichung über diese Systeme ist in Vorbereitung. Die in [6] betrachteten rotationssymmetrischen elektrostatischen Kernlinsen bestehen aus inneren Rohren (Kernen) und äußeren Rohren als Linsenelektroden. Ein von der Rotationsachse ausgehendes Elektronenbündel wird von dem Feld zwischen den koaxialen Innen- und Außenrohren fokussiert und zur Achse zurückgelenkt. Ähnliche elektrostatische Systeme wurden bereits von H. Liebl [10] in Verbindung mit einem magnetischen Orangenspektrometer als Massenspektrometer für Sekundärionen vorgeschlagen.

Bei den numerischen Berechnungen [3–6] ist die Computerzeit für die einzelne Bahnintegration relativ klein. Für das Suchverfahren zur Auffindung eines gut korrigierten 3D-Objektivs müssen aber sehr viele Bahnen berechnet werden, so daß die Rechenzeit erheblich wird. Außerdem hängen die Konvergenz und teilweise auch das Endergebnis des Suchverfahrens stark von der Wahl der Startwerte und der fest vorgegebenen Werte für die Linsenparameter (Elektrodenpotentiale, Maximalinduktionen, Geometrieparameter usw.) ab. Es ist darum wünschenswert, daß man aus analytischen Überlegungen — z.B. Symmetriebetrachtungen oder Abschätzungen anhand analytischer Bildfehler-Integrale — weiß, in welchen Bereichen der Linsenparameter ein System mit dem gewünschten Korrekturgrad zu erwarten ist. Mit diesem Wissen über Symmetrien (z.B. Anzahl von Zwischenbildern) oder mit durch analytische Abschätzungen verbesserten Startwerten läßt sich das Suchverfahren wesentlich beschleunigen. Bereits in [3–6] haben wir bei der Korrektur von Öffnungsfehlern und axialen Farbfehlern solche Vorkenntnisse benutzt. Bei der Korrektur weiterer Bildfehler, insbesondere der bildfeldbegrenzenden außeraxialen

* Jetzige Anschrift: Messerschmitt-Bölkow-Blohm GmbH, D-8012 Ottobrunn bei München.

Sonderdruckanforderungen an: Dr. D. Typke, Max-Planck-Institut für Biochemie, Abtl. für Strukturforschung I, D-8033 Martinsried bei München.

Bildfehler, soll ähnlich vorgegangen werden. Dafür benötigen wir die analytischen Bildfehler-Integrale.

Fast allen in [1] angegebenen 3D-Objektiven mit ebener oder konischer Primärstrahlführung ist gemeinsam, daß die Bündelachse jedes abbildenden Bündels gekrümmt ist. Wir bezeichnen diese im allgemeinen beliebig gekrümmte und in vielen Fällen (insbesondere in magnetischen Systemen, z.B. in [3—5]) auch noch beliebig tordierte Achse als *optische Achse*. Scharf von ihr zu trennen sind eventuell vorhandene Symmetrieachsen des Feldes, wie z.B. die gerade Rotationsachse bei den Systemen mit Ringzonensegment-Abbildung. Auch bei den letzteren Systemen ist es wegen des stark geneigten Strahlengangs — der Neigungswinkel zwischen Bündelachse und Rotationsachse soll im Objekt etwa 40—60° betragen — nicht zweckmäßig, von einer Entwicklung um die Rotationsachse auszugehen. Bei Kernlinsen ist eine solche Entwicklung überhaupt nicht möglich.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die Abbildungs- und Bildfehler-Theorie von Systemen mit gekrümmter Achse in ganz allgemeiner Form unter Einbeziehung von Farb- und Justierfehlern zu entwickeln. Die Bildfehler zweiter Stufe werden explizit in einer Form angegeben, aus der sich die einzelnen Fehlerintegrale sehr einfach gewinnen lassen. Bei den Bildfehlern dritter Stufe geben wir alle Eikonalanteile an, die zu diesen Fehlern beitragen.

Unter der Stufe eines Bildfehlers verstehen wir nach einem Vorschlag von O. Scherzer die Summe aus Seidelscher Ordnung und Potenz des Störpotentials; bei letzterem unterscheiden wir weiter zwischen Farbabweichung und Justierfehlern (Abweichungen von der gewollten Potentialverteilung). Wir verwenden also eine Entwicklung, in der wir die Abstände einer Bahn von der optischen Achse, ihre Neigung gegen diese Achse sowie das relative Störpotential (bezogen auf eine charakteristische Potentialdifferenz des Systems) als kleine Größen gleicher Größenordnung betrachten. Glieder von gleichem Homogenitätsgrad in diesen Größen werden zu einer Stufe zusammengefaßt*.

Über die Abbildungs- und Bildfehlertheorie von elektronen- und ionenoptischen Systemen mit gekrümmter Achse gibt es bereits eine ganze Reihe von Veröffentlichungen [11—49]. Die meisten dieser Arbeiten setzen Bündel mit kreisförmiger optischer Achse voraus [11—33]; wir können sie daher nicht anwenden. Systeme mit beliebig gekrümmter optischer Achse werden in [34—49] betrachtet. Dabei werden in einigen Arbeiten spezielle Annahmen über das Feld und/oder die Bahnen gemacht. In [34] und [40] werden nur die Bildfehler von Orthogonalsystemen betrachtet, so daß eine Anwendung dieser Theorien bei den magnetischen 3D-Objektiven [3—5] nicht möglich ist. Die Arbeiten [35, 37, 38]** beschränken sich auf die Gaußsche Dioptrik und in [46] sind zusätzlich die Farbfehler nullter und erster Ordnung, aber keine Bildfehler 2. Ordnung enthalten. In [36, 41—43] werden besondere Bahnmethoden bei krummer Achse entwickelt, die wir für unsere Zwecke als nicht besonders geeignet erachten. Die Bahnmethode hat zudem gegenüber der Eikonalmethode den prinzipiellen Nachteil, daß sie nicht automatisch die linearen Verknüpfungen zwischen den Bildfehler-Koeffizienten einer Ordnung liefert. [44] und [45] enthalten einen Disput zwischen Grünberg und Kas'yankov. In [48] und [49] wurden nur die Bildfehler des reinen Magnetfeldes bei spezieller Gaußscher Dioptrik (durchgehend astigmatismusfrei) untersucht. Die Arbeiten [39] und [47] enthalten u. a. allgemeine Beiträge zur Eikonal- und Störungstheorie bei krummer Achse, es sind jedoch keine direkt anwendbaren Bildfehler-Integrale angegeben.

Unsere Theorie ist eine Erweiterung der in [50] formulierten Theorie unrunder Elektronenlinsen mit gerader optischer Achse sowie von Arbeiten über spezielle Systeme mit gekrümmter Achse [48, 49] auf den ganz allgemeinen Fall. Über die Krümmung und Torsion der optischen Achse machen wir außer der Forderung der Stetigkeit keine Einschränkungen. Wir verlangen zunächst auch nicht, daß die optische Achse zugleich eine Elektronenbahn sein soll. Im Interesse einer guten Konvergenz der Bildfehlerentwicklung sollte sie sich aber nicht

* Die Annahme gleicher Größenordnung trifft nur bedingt zu. So sind im Elektronenmikroskop die (auf eine charakteristische Länge bezogenen) Bahnabstände von der optischen Achse und die relativen Justier-Störpotentiale von der Größenordnung $10^{-3} \cdots 10^{-2}$, während die relative Farbabweichung von der Größenordnung 10^{-5} ist. Genau genommen müßte man daher bei dieser Art der Entwicklung bei den verschiedenen Fehlern bis zu unterschiedlicher Stufe gehen.

** Tsukkerman [41] macht darauf aufmerksam, daß in der Theorie von Wendt [37] die Vektoroperationen grad, div usw. für tordierte Systeme nicht korrekt sind. Das gleiche gilt für die Arbeit [38], in der Wendts Theorie verwendet wird.

zu sehr von einer Bahn unterscheiden. Das elektromagnetische Feld soll stationär sein und im durchstrahlten Bereich keine Ladungen und Ströme enthalten. Im Unterschied zu den meisten Autoren, jedoch in Übereinstimmung mit [50, 51] entwickeln wir die elektromagnetischen Potentiale nach ebenen Multipolen, d.h. nach harmonischen Polynomen, nicht nach Polynomen in den achsensenkrechten Koordinaten x, y. Für die Bildfehlertheorie verwenden wir die Eikonalmethode in der von H. Rose ausgearbeiteten Form [50]. Diese Integralgleichungsmethode ist auch für nicht entkoppelbare (nicht orthogonale) elektronenoptische Systeme anwendbar. Die Rechnungen berücksichtigen die relativistische Massenveränderlichkeit, und meist bedienen wir uns der komplexen Schreibweise, d.h. wir fassen die x- und y-Komponente von Vektoren zu einer komplexen Größe zusammen.

Der „Spezialfall" der Einschnittsymmetrie wird etwas ausführlicher diskutiert. Er beschreibt außer den torsionsfreien 3D-Objektiven die meisten Spektrometersysteme, auch solche, die eine nicht kreisförmige ebene Kurve als optische Achse besitzen. Bei den Spektrometern mit (stückweise) kreisförmiger Bündelachse ist die optische Achse — falls sie zugleich Elektronenbahn sein soll — nur im Hauptfeld aber nicht im Randfeld ein Kreis. Üblicherweise wird daher für das Randfeld eine zusätzliche eigene Bildfehlertheorie entwickelt. Da wir aber die Krümmung der optischen Achse als veränderlich annehmen, beschreiben unsere Bildfehlerintegrale Haupt- *und* Randfeldeinflüsse. Enthalten ist in den Bildfehlerintegralen aber auch der Fall der (stückweise) kreisförmigen optischen Achse, die nicht zugleich Elektronenbahn ist.

2. Koordinatensystem und Potentialentwicklung

Als Koordinatensystem benutzen wir die in [48] eingeführten und auch in [49, 52] verwendeten krummlinigen Koordinaten x, y, z. Dabei ist z die Bogenlänge der Bündelachse, welche die Krümmung $\varkappa = \varkappa(z)$ und die Torsion $\tau = \tau(z)$ besitzt. x und y sind die achsensenkrechten Koordinaten, die wir oft komplex zu $w = x + iy$ bzw. $\bar{w} = x - iy$ zusammenfassen. Das Koordinatensystem x, y, z ist wie in [34, 46, 48] gegenüber dem begleitenden Dreibein um den Torsionswinkel

$$\vartheta(z) = \int_0^z \tau(z)\,\mathrm{d}z \tag{1}$$

zurückgedreht. Mit dieser erstmals von Cotte [34] verwendeten Transformation werden x, y, z ein Orthogonalsystem und das Wegelement erhält die einfache Form:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}w\,\mathrm{d}\bar{w} + h_z{}^2\,\mathrm{d}z^2 \tag{2a}$$

mit

$$h_z = 1 - \mathrm{Re}(\Gamma\bar{w}), \quad \Gamma = \varkappa\, e^{i\vartheta}. \tag{2b}$$

Ohne diese Zurückdrehung hätte das Bogenelement eine wesentlich kompliziertere Gestalt.

In [48] wurde die Lösung der Laplace-Gleichung für das skalare magnetische Potential ψ in Form einer Potenzreihe nach den Koordinaten w und $\bar{w}$ angegeben. Diese Entwicklung nach ebenen Multipolen unterscheidet bei Gliedern der gleichen Achsenabstandspotenz zwischen den verschiedenen Zähligkeiten um die krumme Achse. Im Spezialfall der geraden Achse wurde die entsprechende Multipolentwicklung bereits in [50, 51, 53, 54] benutzt.

Berücksichtigt man Glieder bis zur vierten Potenz des Achsenabstandes einschließlich, so lautet die Multipolentwicklung für das skalare elektrische Potential:

$$\begin{aligned}\varphi = \mathrm{Re}\Big\{&\Phi_0 + \Phi_1\bar{w} + \Phi_2\bar{w}^2 + \left[\frac{1}{4}\Phi_1\bar{\Gamma} - \frac{1}{4}\Phi_0''\right]w\bar{w} + \Phi_3\bar{w}^3\\
&+\left[\frac{1}{4}\Phi_2\bar{\Gamma} - \frac{1}{8}\Phi_1'' + \frac{3}{16}\mathrm{Re}(\Phi_1\bar{\Gamma})\,\Gamma - \frac{5}{16}\Phi_0''\,\Gamma - \frac{1}{8}\Phi_0'\,\Gamma'\right]w\bar{w}^2 + \Phi_4\bar{w}^4\\
&+\left[\frac{1}{4}\Phi_3\bar{\Gamma} - \frac{1}{12}\Phi_2'' + \frac{5}{48}\Phi_2\,\Gamma\bar{\Gamma} - \frac{3}{32}\Phi_1''\,\Gamma - \frac{1}{24}\Phi_1'\,\Gamma' + \frac{5}{64}\mathrm{Re}(\Phi_1\bar{\Gamma})\,\Gamma^2\right.\\
&\left.-\frac{11}{64}\Phi_0''\,\Gamma^2 - \frac{13}{96}\Phi_0'\,\Gamma'\,\Gamma\right]w\bar{w}^3 + \left[\frac{3}{32}\Phi_2\bar{\Gamma}^2 - \frac{3}{32}\Phi_1''\bar{\Gamma} - \frac{1}{16}\Phi_1'\bar{\Gamma}'\right.\\
&\left.-\frac{1}{64}\Phi_1\bar{\Gamma}'' + \frac{9}{128}\Phi_1\,\Gamma\bar{\Gamma}^2 + \frac{1}{64}\Phi_0'''' - \frac{19}{128}\Phi_0''\,\Gamma\bar{\Gamma} - \frac{7}{64}\Phi_0'\,\bar{\Gamma}'\,\Gamma\right]w^2\bar{w}^2 + \cdots\Big\}.\end{aligned} \tag{3}$$

In dieser Gleichung sind die Multipolkoeffizienten $\Phi_0 = \bar{\Phi}_0 = \Phi_{0c}(z)$ und $\Phi_\mu = \Phi_\mu(z) = \Phi_{\mu c}(z) + i\,\Phi_{\mu s}(z)$ (für $\mu \geqq 1$) durch die Randbedingungen (Gestalt der Elektroden und Randpotentiale) bestimmt. Für das skalare magnetische Potential ersetze man in Gl. (3) $\varphi \to \psi$ und $\Phi_\mu \to \Psi_\mu$. Wie in [48] erhält man das magnetische Vektorpotential $\boldsymbol{A}$ unter Verwendung der Eichung $A_z = 0$ und der komplexen Schreibweise $A = A_x + i A_y$ aus der Differentialgleichung

$$\frac{1}{h_z}\,\frac{\partial A}{\partial z} = 2i\,\frac{\partial \psi}{\partial \bar{w}}\,. \tag{4}$$

Im folgenden lassen wir, wie allgemein üblich, beim Potential auf der Achse den Index Null weg, $\Phi_0 = \Phi$, und bezeichnen mit

$$B = B(z) = B_z(0,0,z) = -\,\Psi_0{}'(z)$$

die z-Komponente der magnetischen Induktion auf der Achse.

3. Das Eikonal

Zur Bestimmung der Elektronenbahnen ist es vorteilhaft die Eikonalmethode zu benutzen, die von W. Glaser [55] in die Elektronenoptik eingeführt wurde. Im Unterschied zur Bahnmethode liefert sie direkt Zusammenhänge zwischen den einzelnen Bildfehlerkoeffizienten einer Ordnung; man erhält darum keine unnötig hohe Anzahl von Koeffizienten*.

Das Eikonal ist das längs einer Elektronenbahn erstreckte Integral

$$\begin{aligned} S &= \int_{\boldsymbol{r}_G}^{\boldsymbol{r}} (m\,\boldsymbol{v} - e\,\boldsymbol{A})\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} \\ &= \mathrm{Re} \int_{z_G}^{z} \{\sqrt{2e\,m_0\,\varphi^*}\,\sqrt{h_z^2 + w'\,\bar{w}'} - e\,A\,\bar{w}'\}\,\mathrm{d}z, \end{aligned} \tag{5}$$

* Besitzt das Feld eine Symmetrie, so verringert sich die Zahl der Fehlerkoeffizienten. Dabei verschwinden in den meisten Fällen bestimmte Koeffizienten, z. B. die Bildfehler gerader Seidelscher Ordnung bei Systemen mit gerader Achse und Zweischnitt-Symmetrie (ohne Berücksichtigung der Störfelder). Wenn sich die Symmetrie im gewählten Koordinatensystem nicht einfach beschreiben läßt, kann es sein, daß zwar keine der in üblicher Form definierten Fehlerkoeffizienten verschwinden, daß aber Beziehungen zwischen ihnen auftreten, wodurch sich die Zahl der unabhängigen Koeffizienten reduziert. Dies ist z. B. der Fall in rotationssymmetrischen 3 D-Objektiven [2].

worin e die Elementarladung, m und m_0 Masse und Ruhemasse und $\boldsymbol{v}$ die Geschwindigkeit des Elektrons bedeuten; φ^* ist das relativistisch korrigierte Potential

$$\varphi^* = \varphi + \hat{\varepsilon}\,\varphi^2 \tag{6}$$

mit

$$\hat{\varepsilon} = \frac{e}{2\,m_0\,c^2} = (1{,}022\ \mathrm{MV})^{-1}\,.$$

Wir zerlegen das Eikonal gemäß

$$\begin{aligned} S &= S(w, \bar{w}, w', \bar{w}', z) \\ &= S_0(z) + \sqrt{\frac{e\,m_0}{2}} \int_{z_G}^{z} F\,\mathrm{d}z \end{aligned} \tag{7}$$

mit

$$F = \sum_{\nu=1}^{\infty} (F_{\nu g} + F_{\nu c} + f_\nu + f_{\nu c})$$

in Beiträge von gleichem Homogenitätsgrad ν in $w, \bar{w}, w'$ und $\bar{w}'$ und unterscheiden bei gleichem Homogenitätsgrad ν zwischen den Eikonalanteilen $F_{\nu g}$, bedingt durch die „gewollten" Felder (Φ, Φ_μ, B, Ψ_μ), den Störanteilen f_ν, verursacht durch Stör- und Justierfelder (Φ_Δ, $\Phi_{\mu\Delta}$, B_Δ, $\Psi_{\mu\Delta}$) und den Eikonalanteilen $F_{\nu c}$ und $f_{\nu c}$, welche die Farbabweichung beschreiben. Die Störanteile f_ν erhält man aus den $F_{\nu g}$, wenn man $\Phi \to \Phi + \Phi_\Delta$, $\Phi_\mu \to \Phi_\mu + \Phi_{\mu\Delta}$ usw. setzt und nach Potenzen von Φ_Δ, $\Phi_{\mu\Delta}$ usw. entwickelt und ordnet. Die Farbfehlerglieder $F_{\nu c}$ und $f_{\nu c}$ folgen durch Ersetzen von Φ durch $\Phi + \Delta\Phi_c$ mit konstantem $\Delta\Phi_c$ und Entwickeln nach Potenzen von $\Delta\Phi_c$. Der Summand S_0 in (7) besteht aus Gliedern, die nicht vom Achsenabstand abhängen, sowie aus den Grenzbeiträgen von partiellen Integrationen. S_0 hängt also nur vom Anfangs- und Endpunkt der Elektronenbahn ab.

Führen wir noch die Abkürzungen

$$\Lambda(z) = 1 + 2\,\hat{\varepsilon}\,\Phi \tag{8}$$

und

$$\eta(z) = \sqrt{\frac{e}{2\,m_0\,\Phi^*}} \quad \text{mit} \quad \Phi^* = \Phi + \hat{\varepsilon}\,\Phi^2$$

ein, so erhalten wir nach etwas langwieriger Rechnung die folgenden Eikonalanteile:

$$F_{1g} = 2\sqrt{\Phi^*}\,\mathrm{Re}\left\{\left[\frac{\Lambda}{2}\,\frac{\Phi_1}{\Phi^*} - \Gamma + i\,\eta\,\Psi_1\right]\bar{w}\right\}, \tag{9}$$

$$
\begin{aligned}
F_{2g} = 2\sqrt{\Phi^*}\,\mathrm{Re}\Big\{ & \frac{1}{2} w'\bar{w}' - \frac{1}{2} i\eta B \bar{w}' w + \left[\frac{\Lambda}{2}\frac{\Phi_2}{\Phi^*} - \frac{1}{16}\frac{\Phi_1^2}{\Phi^{*2}} - \frac{\Lambda}{4}\frac{\Phi_1}{\Phi^*}\Gamma + i\eta\left(\Psi_2 - \frac{1}{4}\Psi_1\Gamma\right)\right]\bar{w}^2 \\
& + \left[-\frac{1}{16}\frac{\Phi_1\overline{\Phi}_1}{\Phi^{*2}} - \frac{\Lambda}{8}\frac{\Phi_1}{\Phi^*}\overline{\Gamma} - \frac{\Lambda}{8}\frac{\Phi''}{\Phi^*} - \frac{1}{4} i\eta\Psi_1\overline{\Gamma}\right] w\bar{w}\Big\},
\end{aligned} \tag{10}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{3g} = 2\sqrt{\Phi^*}\,\mathrm{Re}\Big\{ & \left[\frac{\Lambda}{4}\frac{\Phi_1}{\Phi^*} + \frac{1}{2}\Gamma\right] w'\bar{w}'\bar{w} + i\eta\left[\frac{1}{8}\Psi_1' - \frac{1}{8} B\Gamma\right](2\bar{w}' w\bar{w} - w'\bar{w}^2) \\
& + \left[\frac{\Lambda}{2}\frac{\Phi_3}{\Phi^*} - \frac{1}{8}\frac{\Phi_2\Phi_1}{\Phi^{*2}} - \frac{\Lambda}{4}\frac{\Phi_2}{\Phi^*}\Gamma + \frac{\Lambda}{64}\frac{\Phi_1^3}{\Phi^{*3}} + \frac{1}{32}\frac{\Phi_1^2}{\Phi^{*2}}\Gamma + i\eta\left(\Psi_3 - \frac{1}{3}\Psi_2\Gamma\right)\right]\bar{w}^3 \\
& + \left[-\frac{1}{8}\frac{\Phi_2\overline{\Phi}_1}{\Phi^{*2}} - \frac{\Lambda}{8}\frac{\Phi_2}{\Phi^*}\overline{\Gamma} - \frac{\Lambda}{16}\frac{\Phi_1''}{\Phi^*} - \frac{\Lambda}{16}\frac{\Phi'}{\Phi^*}\Gamma' + \frac{1}{16}\frac{\Phi_1\Phi''}{\Phi^{*2}} - \frac{\Lambda}{32}\frac{\Phi''}{\Phi^*}\Gamma + \frac{3\Lambda}{64}\frac{\Phi_1^2\overline{\Phi}_1}{\Phi^{*3}}\right. \\
& \left. + \frac{1}{32}\frac{\Phi_1\overline{\Phi}_1}{\Phi^{*2}}\Gamma - \frac{\Lambda}{32}\mathrm{Re}\left(\frac{\Phi_1}{\Phi^*}\overline{\Gamma}\right)\Gamma + i\eta\left(-\frac{1}{4}\Psi_2\overline{\Gamma} + \frac{1}{16}\mathrm{Re}(\Psi_1\overline{\Gamma})\Gamma + \frac{1}{16}B'\Gamma\right)\right] w\bar{w}^2\Big\},
\end{aligned} \tag{11}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{4g} = 2\sqrt{\Phi^*}\,\mathrm{Re}\Big\{ & -\frac{1}{8} w'^2\bar{w}'^2 + \left[\frac{\Lambda}{4}\frac{\Phi_2}{\Phi^*} - \frac{1}{32}\frac{\Phi_1^2}{\Phi^{*2}} + \frac{\Lambda}{8}\frac{\Phi_1}{\Phi^*}\Gamma + \frac{1}{4}\Gamma^2\right] w'\bar{w}'\bar{w}^2 \\
& + \left[-\frac{1}{32}\frac{\Phi_1\overline{\Phi}_1}{\Phi^{*2}} + \frac{3\Lambda}{16}\frac{\Phi_1}{\Phi^*}\overline{\Gamma} + \frac{1}{4}\Gamma\overline{\Gamma} - \frac{\Lambda}{16}\frac{\Phi''}{\Phi^*}\right] w'\bar{w}' w\bar{w} + i\eta\left[\frac{1}{4}\Psi_2' + \frac{1}{4}\Psi_1'\Gamma - \frac{1}{4}B\Gamma^2\right] \\
& \cdot \bar{w}' w\bar{w}^2 - \frac{1}{12} i\eta\Psi_2' w'\bar{w}^3 + i\eta\left[\frac{1}{16}\mathrm{Re}(3\Psi_1'\overline{\Gamma} + \Psi_1\overline{\Gamma}') - \frac{1}{8}B\Gamma\overline{\Gamma} + \frac{1}{16}B''\right]\bar{w}' w^2\bar{w} \\
& + \left[\frac{\Lambda}{2}\frac{\Phi_4}{\Phi^*} - \frac{1}{8}\frac{\Phi_3\Phi_1}{\Phi^{*2}} - \frac{\Lambda}{4}\frac{\Phi_3}{\Phi^*}\Gamma - \frac{1}{16}\frac{\Phi_2^2}{\Phi^{*2}} + \frac{3\Lambda}{64}\frac{\Phi_2\Phi_1^2}{\Phi^{*3}} + \frac{1}{16}\frac{\Phi_2\Phi_1}{\Phi^{*2}}\Gamma - \frac{4\Lambda^2+1}{1024}\frac{\Phi_1^4}{\Phi^{*4}}\right. \\
& \left. - \frac{\Lambda}{128}\frac{\Phi_1^3}{\Phi^{*3}}\Gamma + i\eta\left(\Psi_4 - \frac{3}{8}\Psi_3\Gamma\right)\right]\bar{w}^4 + \left[-\frac{1}{8}\frac{\Phi_3\overline{\Phi}_1}{\Phi^{*2}} - \frac{\Lambda}{8}\frac{\Phi_3}{\Phi^*}\overline{\Gamma} - \frac{\Lambda}{24}\frac{\Phi_2''}{\Phi^*} + \frac{1}{16}\frac{\Phi_2\Phi''}{\Phi^{*2}}\right. \\
& + \frac{3\Lambda}{32}\frac{\Phi_2\Phi_1\overline{\Phi}_1}{\Phi^{*3}} + \frac{1}{32}\frac{\Phi_2\overline{\Phi}_1}{\Phi^{*2}}\Gamma - \frac{\Lambda}{96}\frac{\Phi_2}{\Phi^*}\Gamma\overline{\Gamma} + \frac{1}{64}\frac{\Phi_1''\Phi_1}{\Phi^{*2}} - \frac{\Lambda}{64}\frac{\Phi_1''}{\Phi^*}\Gamma - \frac{\Lambda}{48}\frac{\Phi_1'}{\Phi^*}\Gamma' \\
& - \frac{3\Lambda}{128}\frac{\Phi_1^2\Phi''}{\Phi^{*3}} + \frac{1}{128}\frac{\Phi_1\Phi''}{\Phi^{*2}}\Gamma - \frac{\Lambda}{128}\frac{\Phi''}{\Phi^*}\Gamma^2 + \frac{1}{64}\frac{\Phi_1\Phi'}{\Phi^{*2}}\Gamma' - \frac{7\Lambda}{192}\frac{\Phi'}{\Phi^*}\Gamma'\Gamma - \frac{4\Lambda^2+1}{256}\frac{\Phi_1^3\overline{\Phi}_1}{\Phi^{*4}} \\
& + \frac{\Lambda}{256}\frac{\Phi_1^3}{\Phi^{*3}}\overline{\Gamma} - \frac{3\Lambda}{256}\frac{\Phi_1^2\overline{\Phi}_1}{\Phi^{*3}}\Gamma + \frac{1}{128}\frac{\Phi_1}{\Phi^*}\mathrm{Re}\left(\frac{\Phi_1}{\Phi^*}\overline{\Gamma}\right)\Gamma - \frac{\Lambda}{128}\mathrm{Re}\left(\frac{\Phi_1}{\Phi^*}\overline{\Gamma}\right)\Gamma^2 + i\eta\left(-\frac{1}{4}\Psi_3\overline{\Gamma}\right. \\
& \left.\left. + \frac{1}{48}\Psi_2\Gamma\overline{\Gamma} + \frac{1}{32}\Psi_1''\Gamma + \frac{1}{24}\Psi_1'\Gamma' - \frac{7}{96}B\Gamma'\Gamma - \frac{1}{64}B'\Gamma^2 + \frac{1}{64}\mathrm{Re}(\Psi_1\overline{\Gamma})\Gamma^2\right)\right] w\bar{w}^3 \\
& + \left[-\frac{1}{16}\frac{\Phi_2\overline{\Phi}_2}{\Phi^{*2}} + \frac{3\Lambda}{64}\frac{\Phi_2\overline{\Phi}_1^2}{\Phi^{*3}} + \frac{1}{32}\frac{\Phi_2\overline{\Phi}_1}{\Phi^{*2}}\overline{\Gamma} + \frac{\Lambda}{64}\frac{\Phi_2}{\Phi^*}\overline{\Gamma}^2 + \frac{1}{64}\frac{\Phi_1''\overline{\Phi}_1}{\Phi^{*2}} - \frac{\Lambda}{64}\frac{\Phi_1''}{\Phi^*}\overline{\Gamma}\right. \\
& - \frac{\Lambda}{32}\frac{\Phi_1'}{\Phi^*}\overline{\Gamma}' - \frac{\Lambda}{128}\frac{\Phi_1}{\Phi^*}\overline{\Gamma}'' + \frac{1}{64}\frac{\Phi_1\Phi'}{\Phi^{*2}}\overline{\Gamma}' - \frac{3\Lambda}{128}\frac{\Phi'}{\Phi^*}\overline{\Gamma}'\Gamma - \frac{3\Lambda}{128}\frac{\Phi_1\overline{\Phi}_1\Phi''}{\Phi^{*3}} + \frac{3}{128}\frac{\Phi_1\Phi''}{\Phi^{*2}}\overline{\Gamma} \\
& + \frac{\Lambda}{256}\frac{\Phi''}{\Phi^*}\Gamma\overline{\Gamma} - \frac{3(4\Lambda^2+1)}{1024}\frac{\Phi_1^2\overline{\Phi}_1^2}{\Phi^{*4}} - \frac{3\Lambda}{256}\frac{\Phi_1}{\Phi^*}\Gamma\overline{\Gamma}^2 + \frac{\Lambda}{128}\frac{\Phi''''}{\Phi^*} - \frac{1}{128}\frac{\Phi''^2}{\Phi^{*2}} \\
& \left. + i\eta\left(-\frac{1}{32}\Psi_2\overline{\Gamma}^2 + \frac{1}{64}\Psi_1''\overline{\Gamma} + \frac{1}{64}B\overline{\Gamma}'\Gamma\right)\right] w^2\bar{w}^2\Big\}.
\end{aligned} \tag{12}
$$

Die Eikonalanteile $F_{\nu c}$ für den Farbfehler schreiben wir als Summe

$$
F_{\nu c} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} F_{\nu\lambda c} \quad \text{mit} \quad F_{\nu\lambda c} \sim \Delta\Phi_c^{\lambda}; \tag{13}
$$

dabei gibt der Index λ den Grad des Farbfehlers (die Potenz von $\Delta\Phi_c$) an. Die Funktionen $F_{\nu\lambda c}$ mit $\nu + \lambda \leqq 4$ sind:

$$F_{11c} = 2\sqrt{\Phi^*}\,\mathrm{Re}\left\{\left[-\frac{1}{4}\frac{\Phi_1}{\Phi^*} - \frac{\Lambda}{2}\Gamma\right]\bar{w}\right\}\frac{\Delta\Phi_c}{\Phi^*}, \tag{14a}$$

$$F_{12c} = 2\sqrt{\Phi^*}\,\mathrm{Re}\left\{\left[\frac{3\Lambda}{16}\frac{\Phi_1}{\Phi^*} + \frac{1}{8}\Gamma\right]\bar{w}\right\}\frac{\Delta\Phi_c^2}{\Phi^{*2}}, \tag{14b}$$

$$F_{13c} = 2\sqrt{\Phi^*}\,\mathrm{Re}\left\{\left[-\frac{4\Lambda^2+1}{32}\frac{\Phi_1}{\Phi^*} - \frac{\Lambda}{16}\Gamma\right]\bar{w}\right\}\frac{\Delta\Phi_c^3}{\Phi^{*3}}, \tag{14c}$$

$$\begin{aligned} F_{21c} = 2\sqrt{\Phi^*}\,\mathrm{Re}\Bigg\{&\frac{\Lambda}{4}w'\bar{w}' + \left[-\frac{1}{4}\frac{\Phi_2}{\Phi^*} + \frac{3\Lambda}{32}\frac{\Phi_1^2}{\Phi^{*2}} + \frac{1}{8}\frac{\Phi_1}{\Phi^*}\Gamma\right]\bar{w}^2 \\ &+ \left[\frac{3\Lambda}{32}\frac{\Phi_1\bar{\Phi}_1}{\Phi^{*2}} + \frac{1}{16}\frac{\Phi_1}{\Phi^*}\bar{\Gamma} + \frac{1}{16}\frac{\Phi''}{\Phi^*}\right]w\bar{w}\Bigg\}\frac{\Delta\Phi_c}{\Phi^*}, \end{aligned} \tag{15a}$$

$$\begin{aligned} F_{22c} = 2\sqrt{\Phi^*}\,\mathrm{Re}\Bigg\{&-\frac{1}{16}w'\bar{w}' + \left[\frac{3\Lambda}{16}\frac{\Phi_2}{\Phi^*} - \frac{3(4\Lambda^2+1)}{128}\frac{\Phi_1^2}{\Phi^{*2}} - \frac{3\Lambda}{32}\frac{\Phi_1}{\Phi^*}\Gamma\right]\bar{w}^2 \\ &+ \left[-\frac{3(4\Lambda^2+1)}{128}\frac{\Phi_1\bar{\Phi}_1}{\Phi^{*2}} - \frac{3\Lambda}{64}\frac{\Phi_1}{\Phi^*}\bar{\Gamma} - \frac{3\Lambda}{64}\frac{\Phi''}{\Phi^*}\right]w\bar{w}\Bigg\}\frac{\Delta\Phi_c^2}{\Phi^{*2}}, \end{aligned} \tag{15b}$$

$$\begin{aligned} F_{31c} = 2\sqrt{\Phi^*}\,\mathrm{Re}\Bigg\{&\left[-\frac{1}{8}\frac{\Phi_1}{\Phi^*} + \frac{\Lambda}{4}\Gamma\right]w'\bar{w}'\bar{w} \\ &+ \left[-\frac{1}{4}\frac{\Phi_3}{\Phi^*} + \frac{3\Lambda}{16}\frac{\Phi_2\Phi_1}{\Phi^{*2}} + \frac{1}{8}\frac{\Phi_2}{\Phi^*}\Gamma - \frac{4\Lambda^2+1}{128}\frac{\Phi_1^3}{\Phi^{*3}} - \frac{3}{64}\frac{\Phi_1^2}{\Phi^{*2}}\Gamma\right]\bar{w}^3 \\ &+ \Bigg[\frac{3\Lambda}{16}\frac{\Phi_2\bar{\Phi}_1}{\Phi^{*2}} + \frac{1}{16}\frac{\Phi_2}{\Phi^*}\bar{\Gamma} + \frac{1}{32}\frac{\Phi_1''}{\Phi^*} + \frac{1}{32}\frac{\Phi'}{\Phi^*}\Gamma' - \frac{3\Lambda}{32}\frac{\Phi_1\Phi''}{\Phi^{*2}} \\ &+ \frac{1}{64}\frac{\Phi''}{\Phi^*}\Gamma - \frac{3(4\Lambda^2+1)}{128}\frac{\Phi_1^2\bar{\Phi}_1}{\Phi^{*3}} - \frac{3\Lambda}{64}\frac{\Phi_1\bar{\Phi}_1}{\Phi^{*2}}\Gamma + \frac{1}{64}\mathrm{Re}\left(\frac{\Phi_1}{\Phi^*}\bar{\Gamma}\right)\Gamma\Bigg]w\bar{w}^2\Bigg\}\frac{\Delta\Phi_c}{\Phi^*}. \end{aligned} \tag{16}$$

Die Stör- und Justier-Anteile f_ν im Eikonal sowie die zugehörigen Farbfehlerterme schreiben wir ebenfalls als Summen:

$$f_\nu = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} f_{\nu\varkappa}, \quad f_{\nu c} = \sum_{\varkappa=1}^{\infty}\sum_{\lambda=1}^{\infty} f_{\nu\varkappa\lambda c} \tag{17}$$

mit

$$\begin{aligned} f_{\nu\varkappa} &\sim \Phi_\Delta^\varkappa, \Phi_{\mu\Delta}^\varkappa, B_\Delta^\varkappa, \ldots, \\ f_{\nu\varkappa\lambda c} &\sim \Phi_\Delta^\varkappa \cdot \Delta\Phi_c^\lambda \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Der Index $\varkappa$ ist die Potenz (genauer der Homogenitätsgrad) der Störfunktionen Φ_Δ, $\Phi_{\mu\Delta}$ usw. und λ wieder der Grad des Farbfehlers. Für die Funktionen $f_{\nu\varkappa}$ mit $\nu+\varkappa \leqq 4$ sowie $f_{\nu\varkappa\lambda c}$ mit $\nu+\varkappa+\lambda \leqq 4$ erhält man

$$f_{11} = 2\sqrt{\Phi^*}\,\mathrm{Re}\left\{\left[\frac{\Lambda}{2}\frac{\Phi_{1\Delta}}{\Phi^*} + \left(-\frac{1}{4}\frac{\Phi_1}{\Phi^*} - \frac{\Lambda}{2}\Gamma\right)\frac{\Phi_\Delta}{\Phi^*} + i\,\eta\,\Psi_{1\Delta}\right]\bar{w}\right\}, \tag{18a}$$

$$f_{12} = 2\sqrt{\Phi^*}\,\mathrm{Re}\left\{\left[-\frac{1}{4}\frac{\Phi_{1\Delta}\Phi_\Delta}{\Phi^{*2}} + \left(\frac{3\Lambda}{16}\frac{\Phi_1}{\Phi^*} + \frac{1}{8}\Gamma\right)\frac{\Phi_\Delta^2}{\Phi^{*2}}\right]\bar{w}\right\}, \tag{18b}$$

$$f_{13} = 2\sqrt{\Phi^*}\,\mathrm{Re}\left\{\left[\frac{3\Lambda}{16}\frac{\Phi_{1\Delta}\Phi_\Delta^2}{\Phi^{*3}} + \left(-\frac{4\Lambda^2+1}{32}\frac{\Phi_1}{\Phi^*} - \frac{\Lambda}{16}\Gamma\right)\frac{\Phi_\Delta^3}{\Phi^{*3}}\right]\bar{w}\right\}, \tag{18c}$$

$$
\begin{aligned}
f_{21} = 2\sqrt{\Phi^*}\,\mathrm{Re}\Bigl\{ & \frac{\Lambda}{4}\frac{\Phi_\Delta}{\Phi^*} w'\,\bar{w}' - \frac{1}{2} i\,\eta\, B_\Delta\,\bar{w}'\,w + \Bigl[\frac{\Lambda}{2}\frac{\Phi_{2\Delta}}{\Phi^*} + \Bigl(-\frac{1}{8}\frac{\Phi_1}{\Phi^*} - \frac{\Lambda}{4}\Gamma\Bigr)\frac{\Phi_{1\Delta}}{\Phi^*} \\
& + \Bigl(-\frac{1}{4}\frac{\Phi_2}{\Phi^*} + \frac{3\Lambda}{32}\frac{\Phi_1^2}{\Phi^{*2}} + \frac{1}{8}\frac{\Phi_1}{\Phi^*}\Gamma\Bigr)\frac{\Phi_\Delta}{\Phi^*} + i\,\eta\Bigl(\Psi_{2\Delta} - \frac{1}{4}\Psi_{1\Delta}\Gamma\Bigr)\Bigr]\bar{w}^2 \\
& + \Bigl[\Bigl(-\frac{1}{8}\frac{\bar{\Phi}_1}{\Phi^*} - \frac{\Lambda}{8}\bar{\Gamma}\Bigr)\frac{\Phi_{1\Delta}}{\Phi^*} - \frac{\Lambda}{8}\frac{\Phi_\Delta''}{\Phi^*} + \Bigl(\frac{3\Lambda}{32}\frac{\Phi_1\bar{\Phi}_1}{\Phi^{*2}} + \frac{1}{16}\frac{\Phi_1}{\Phi^*}\bar{\Gamma} + \frac{1}{16}\frac{\Phi''}{\Phi^*}\Bigr)\frac{\Phi_\Delta}{\Phi^*} \\
& - \frac{1}{4} i\,\eta\,\Psi_{1\Delta}\bar{\Gamma}\Bigr] w\,\bar{w}\Bigr\},
\end{aligned}
\tag{19a}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{22} = 2\sqrt{\Phi^*}\,\mathrm{Re}\Bigl\{ & -\frac{1}{16}\frac{\Phi_\Delta^2}{\Phi^{*2}} w'\,\bar{w}' + \Bigl[-\frac{1}{4}\frac{\Phi_{2\Delta}\Phi_\Delta}{\Phi^{*2}} - \frac{1}{16}\frac{\Phi_{1\Delta}^2}{\Phi^{*2}} + \Bigl(\frac{3\Lambda}{16}\frac{\Phi_1}{\Phi^*} + \frac{1}{8}\Gamma\Bigr)\frac{\Phi_{1\Delta}\Phi_\Delta}{\Phi^{*2}} \\
& + \Bigl(\frac{3\Lambda}{16}\frac{\Phi_2}{\Phi^*} - \frac{3(4\Lambda^2+1)}{128}\frac{\Phi_1^2}{\Phi^{*2}} - \frac{3\Lambda}{32}\frac{\Phi_1}{\Phi^*}\Gamma\Bigr)\frac{\Phi_\Delta^2}{\Phi^{*2}}\Bigr]\bar{w}^2 \\
& + \Bigl[-\frac{1}{16}\frac{\Phi_{1\Delta}\bar{\Phi}_{1\Delta}}{\Phi^{*2}} + \Bigl(\frac{3\Lambda}{16}\frac{\bar{\Phi}_1}{\Phi^*} + \frac{1}{16}\bar{\Gamma}\Bigr)\frac{\Phi_{1\Delta}\Phi_\Delta}{\Phi^{*2}} + \frac{1}{16}\frac{\Phi_\Delta''\Phi_\Delta}{\Phi^{*2}} \\
& + \Bigl(-\frac{3(4\Lambda^2+1)}{128}\frac{\Phi_1\bar{\Phi}_1}{\Phi^{*2}} - \frac{3\Lambda}{64}\frac{\Phi_1}{\Phi^*}\bar{\Gamma} - \frac{3\Lambda}{64}\frac{\Phi''}{\Phi^*}\Bigr)\frac{\Phi_\Delta^2}{\Phi^{*2}}\Bigr] w\,\bar{w}\Bigr\},
\end{aligned}
\tag{19b}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{31} = 2\sqrt{\Phi^*}\,\mathrm{Re}\Bigl\{ & \Bigl[\frac{\Lambda}{4}\frac{\Phi_{1\Delta}}{\Phi^*} + \Bigl(-\frac{1}{8}\frac{\Phi_1}{\Phi^*} + \frac{\Lambda}{4}\Gamma\Bigr)\frac{\Phi_\Delta}{\Phi^*}\Bigr] w'\,\bar{w}'\,\bar{w} + i\,\eta\Bigl[\frac{1}{8}\Psi_{1\Delta}' - \frac{1}{8}B_\Delta\Gamma\Bigr] \\
& \cdot(2\bar{w}'\,w\,\bar{w} - w'\,\bar{w}^2) + \Bigl[\frac{\Lambda}{2}\frac{\Phi_{3\Delta}}{\Phi^*} + \Bigl(-\frac{1}{8}\frac{\Phi_1}{\Phi^*} - \frac{\Lambda}{4}\Gamma\Bigr)\frac{\Phi_{2\Delta}}{\Phi^*} \\
& + \Bigl(-\frac{1}{8}\frac{\Phi_2}{\Phi^*} + \frac{3\Lambda}{64}\frac{\Phi_1^2}{\Phi^{*2}} + \frac{1}{16}\frac{\Phi_1}{\Phi^*}\Gamma\Bigr)\frac{\Phi_{1\Delta}}{\Phi^*} + \Bigl(-\frac{1}{4}\frac{\Phi_3}{\Phi^*} + \frac{3\Lambda}{16}\frac{\Phi_2\Phi_1}{\Phi^{*2}} + \frac{1}{8}\frac{\Phi_2}{\Phi^*}\Gamma \\
& - \frac{4\Lambda^2+1}{128}\frac{\Phi_1^3}{\Phi^{*3}} - \frac{3\Lambda}{64}\frac{\Phi_1^2}{\Phi^{*2}}\Gamma\Bigr)\frac{\Phi_\Delta}{\Phi^*} + i\,\eta\Bigl(\Psi_{3\Delta} - \frac{1}{3}\Psi_{2\Delta}\Gamma\Bigr)\Bigr]\bar{w}^3 \\
& + \Bigl[\Bigl(-\frac{1}{8}\frac{\bar{\Phi}_1}{\Phi^*} - \frac{\Lambda}{8}\bar{\Gamma}\Bigr)\frac{\Phi_{2\Delta}}{\Phi^*} - \frac{\Lambda}{16}\frac{\Phi_{1\Delta}''}{\Phi^*} + \Bigl(\frac{3\Lambda}{32}\frac{\Phi_1\bar{\Phi}_1}{\Phi^{*2}} + \frac{1}{32}\frac{\bar{\Phi}_1}{\Phi^*}\Gamma - \frac{\Lambda}{64}\Gamma\bar{\Gamma} + \frac{1}{16}\frac{\Phi''}{\Phi^*}\Bigr)\frac{\Phi_{1\Delta}}{\Phi^*} \\
& + \Bigl(-\frac{1}{8}\frac{\Phi_2}{\Phi^*} + \frac{3\Lambda}{64}\frac{\Phi_1^2}{\Phi^{*2}} + \frac{1}{32}\frac{\Phi_1}{\Phi^*}\Gamma - \frac{\Lambda}{64}\Gamma^2\Bigr)\frac{\bar{\Phi}_{1\Delta}}{\Phi^*} + \Bigl(\frac{1}{16}\frac{\Phi_1}{\Phi^*} - \frac{\Lambda}{32}\Gamma\Bigr)\frac{\Phi_\Delta''}{\Phi^*} \\
& - \frac{\Lambda}{16}\frac{\Phi_\Delta'}{\Phi^*}\Gamma' + \Bigl(\frac{3\Lambda}{16}\frac{\Phi_2\bar{\Phi}_1}{\Phi^{*2}} + \frac{1}{16}\frac{\Phi_2}{\Phi^*}\bar{\Gamma} + \frac{1}{32}\frac{\Phi_1''}{\Phi^*} + \frac{1}{32}\frac{\Phi'}{\Phi^*}\Gamma' - \frac{3\Lambda}{32}\frac{\Phi_1\Phi''}{\Phi^{*2}} \\
& + \frac{1}{64}\frac{\Phi''}{\Phi^*}\Gamma - \frac{3(4\Lambda^2+1)}{128}\frac{\Phi_1^2\bar{\Phi}_1}{\Phi^{*3}} - \frac{3\Lambda}{64}\frac{\Phi_1\bar{\Phi}_1}{\Phi^{*2}}\Gamma + \frac{1}{64}\mathrm{Re}\Bigl(\frac{\Phi_1}{\Phi^*}\bar{\Gamma}\Bigr)\Gamma\Bigr)\frac{\Phi_\Delta}{\Phi^*} \\
& + i\,\eta\Bigl(-\frac{1}{4}\Psi_{2\Delta}\bar{\Gamma} + \frac{1}{16}\mathrm{Re}(\Psi_{1\Delta}\bar{\Gamma})\,\Gamma + \frac{1}{16}B_\Delta'\,\Gamma\Bigr)\Bigr] w\,\bar{w}^2\Bigr\},
\end{aligned}
\tag{20}
$$

$$
f_{111c} = 2\sqrt{\Phi^*}\,\mathrm{Re}\Bigl\{\Bigl[-\frac{1}{4}\frac{\Phi_{1\Delta}}{\Phi^*} + \Bigl(\frac{3\Lambda}{8}\frac{\Phi_1}{\Phi^*} + \frac{1}{4}\Gamma\Bigr)\frac{\Phi_\Delta}{\Phi^*}\Bigr]\bar{w}\Bigr\}\frac{\Delta\Phi_c}{\Phi^*},
\tag{21a}
$$

$$
f_{112c} = 2\sqrt{\Phi^*}\,\mathrm{Re}\Bigl\{\Bigl[\frac{3\Lambda}{16}\frac{\Phi_{1\Delta}}{\Phi^*} + \Bigl(-\frac{3(4\Lambda^2+1)}{32}\frac{\Phi_1}{\Phi^*} - \frac{3\Lambda}{16}\Gamma\Bigr)\frac{\Phi_\Delta}{\Phi^*}\Bigr]\bar{w}\Bigr\}\frac{\Delta\Phi_c^2}{\Phi^{*2}},
\tag{21b}
$$

$$
f_{121c} = 2\sqrt{\Phi^*}\,\mathrm{Re}\Bigl\{\Bigl[\frac{3\Lambda}{8}\frac{\Phi_{1\Delta}\Phi_\Delta}{\Phi^{*2}} + \Bigl(-\frac{3(4\Lambda^2+1)}{32}\frac{\Phi_1}{\Phi^*} - \frac{3\Lambda}{16}\Gamma\Bigr)\frac{\Phi_\Delta^2}{\Phi^{*2}}\Bigr]\bar{w}\Bigr\}\frac{\Delta\Phi_c}{\Phi^*},
\tag{21c}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{211c} = 2\sqrt{\Phi^*}\,\mathrm{Re}\Big\{ & -\frac{1}{8}\frac{\Phi_\Delta}{\Phi^*}w'\bar{w}' + \Big[-\frac{1}{4}\frac{\Phi_{2\Delta}}{\Phi^*} + \Big(\frac{3\Lambda}{16}\frac{\Phi_1}{\Phi^*} + \frac{1}{8}\Gamma\Big)\frac{\Phi_{1\Delta}}{\Phi^*} \\
& + \Big(\frac{3\Lambda}{8}\frac{\Phi_2}{\Phi^*} - \frac{3(4\Lambda^2+1)}{64}\frac{\Phi_1{}^2}{\Phi^{*2}} - \frac{3\Lambda}{16}\frac{\Phi_1}{\Phi^*}\Gamma\Big)\frac{\Phi_\Delta}{\Phi^*}\Big]\bar{w}^2 + \Big[\Big(\frac{3\Lambda}{16}\frac{\bar{\Phi}_1}{\Phi^*} + \frac{1}{16}\bar{\Gamma}\Big)\frac{\Phi_{1\Delta}}{\Phi^*} \\
& + \frac{1}{16}\frac{\Phi_\Delta''}{\Phi^*} + \Big(-\frac{3(4\Lambda^2+1)}{64}\frac{\Phi_1\bar{\Phi}_1}{\Phi^{*2}} - \frac{3\Lambda}{32}\frac{\Phi_1}{\Phi^*}\bar{\Gamma} - \frac{3\Lambda}{32}\frac{\Phi''}{\Phi^*}\Big)\frac{\Phi_\Delta}{\Phi^*}\Big]w\bar{w}\Big\}\frac{\Delta\Phi_c}{\Phi^*}.
\end{aligned} \tag{22}
$$

Mit diesen Eikonalanteilen lassen sich auch die Justierfehler von komplizierten Quadrupol-Oktupol-Korrektoren mit gerader Achse berechnen, wie sie in [56—61] vorgeschlagen bzw. gebaut wurden. Im Unterschied zu [50] wird bei den elektrischen Störpotentialen in den Gln. (18) bis (21) nicht nur die erste Potenz berücksichtigt*. Die magnetischen Störpotentiale hingegen treten immer nur in der ersten Potenz auf.

Die Gln. (9) bis (22) enthalten sämtliche Eikonalanteile, die zu den Bildfehlern bis einschließlich der dritten Stufe beitragen können.

4. Gaußsche Dioptrik

Erstreckt man das Integral (5) über zunächst beliebige Raumkurven, so sind die Elektronenbahnen gegenüber benachbarten Kurven dadurch ausgezeichnet, daß für sie nach dem Prinzip von Maupertuis-Fermat die Variation δS verschwindet. Da bei der Variation Anfangs- und Endpunkt der Bahn festgehalten werden, liefert S_0 von Gl. (7) keinen Beitrag, und man erhält als Bahngleichung die Euler-Lagrangesche Differentialgleichung

$$
\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{\partial}{\partial\bar{w}'} - \frac{\partial}{\partial\bar{w}}\Big)(F_{1g} + F_{2g} + F_{11c} + f_{11}) = -\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{\partial}{\partial\bar{w}'} - \frac{\partial}{\partial\bar{w}}\Big)\sigma \tag{23}
$$

mit

$$
\sigma = F - (F_{1g} + F_{2g} + F_{11c} + f_{11}).
$$

Setzt man F_{1g} usw. ein, so ergibt sich als Bahngleichung:

$$
\begin{aligned}
w'' & + \Big(\frac{\Lambda}{2}\frac{\Phi'}{\Phi^*} - i\eta B\Big)w' + \Big[\frac{1}{8}\frac{\Phi_1\bar{\Phi}_1}{\Phi^{*2}} + \frac{\Lambda}{4} \\
& \cdot \mathrm{Re}\Big(\frac{\Phi_1}{\Phi^*}\bar{\Gamma}\Big) + \frac{\Lambda}{4}\frac{\Phi''}{\Phi^*} + \frac{1}{2}\mathrm{Re}(i\eta\Psi_1\bar{\Gamma}) \\
& - \frac{1}{2}i\eta B'\Big]w - \Big[\Lambda\frac{\Phi_2}{\Phi^*} - \frac{1}{8}\frac{\Phi_1{}^2}{\Phi^{*2}} \\
& - \frac{\Lambda}{2}\frac{\Phi_1}{\Phi^*}\Gamma + 2i\eta\Psi_2 - \frac{1}{2}i\eta\Psi_1\Gamma\Big]\bar{w} \\
= & \Big[\frac{\Lambda}{2}\frac{\Phi_1}{\Phi^*} - \Gamma + i\eta\Psi_1\Big] + \Big[\frac{\Lambda}{2}\frac{\Phi_{1\Delta}}{\Phi^*} \\
& + \Big(-\frac{1}{4}\frac{\Phi_1}{\Phi^*} - \frac{\Lambda}{2}\Gamma\Big)\frac{\Phi_\Delta}{\Phi^*} + i\eta\Psi_{1\Delta}\Big] \\
& + \Big[-\frac{1}{4}\frac{\Phi_1}{\Phi^*} - \frac{\Lambda}{2}\Gamma\Big]\frac{\Phi_\mathrm{G}}{\Phi^*}\varepsilon + s
\end{aligned} \tag{24}
$$

mit

$$
\Phi_\mathrm{G} = \Phi(z_\mathrm{G}), \quad \varepsilon = \Delta\Phi_c/\Phi_\mathrm{G}
$$

und

$$
s = \frac{1}{\sqrt{\Phi^*}}\Big(\frac{\partial\sigma}{\partial\bar{w}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{\partial\sigma}{\partial\bar{w}'}\Big).
$$

Bei Vernachlässigung der Bahnstörung s beschreibt (24) die Gaußschen Bahnen unter Einschluß der durch die Wahl der optischen Achse bedingten Abweichungen sowie der Farb- und Justierfehler nullter Seidelscher Ordnung. Soll die optische Achse bei der gewollten Feldverteilung ($\Delta\Phi_c = \Phi_\Delta = \Phi_{1\Delta} = \Psi_{1\Delta} = 0$) zugleich Elektronenbahn sein, so muß die erste Klammer auf der rechten Seite von (24) verschwinden; der Krümmungs- und Torsionsparameter muß dann der Gleichung

$$
\frac{\Lambda}{2}\frac{\Phi_1}{\Phi^*} - \Gamma + i\eta\Psi_1 = 0 \tag{25}
$$

genügen. Wenn dieser Ausdruck nicht verschwindet, so sollte er auf jeden Fall von gleicher Größenordnung klein sein wie die übrigen Glieder der ungestörten Gl. (24), d.h. eine kleine Größe der ersten Stufe. Dann ist gewährleistet, daß die Bahnstörung s nur zu Abweichungen von mindestens zweiter Stufe führt.

Oft ist es zweckmäßig, statt der komplexen Koordinate w die neuen (ebenfalls komplexen) Koordinaten u oder U zu verwenden, die mit w durch die Transformationen

$$
U = \Big(\frac{\Phi^*}{\Phi_\mathrm{G}{}^*}\Big)^{1/4} u = \Big(\frac{\Phi^*}{\Phi_\mathrm{G}{}^*}\Big)^{1/4} e^{-i\chi} w \tag{26}
$$

* Gl. (14)—(16) in [50] enthalten mehrere Druckfehler.

verknüpft sind. Der Winkel χ ist die Larmor-Drehung der achsennahen Bahnen:

$$\chi = \tfrac{1}{2} \int_{z_G}^{z} \eta \, B \, \mathrm{d}z \,. \tag{27}$$

Im U-System lautet die Bahngleichung:

$$U'' + T U - G \bar{U} = \Pi_\Gamma + \Pi_\Delta + \Pi_\varepsilon + \Sigma \tag{28}$$

mit

$$T = \bar{T} = \frac{1}{8} \frac{\Phi_1 \bar{\Phi}_1}{\Phi^{*2}} + \frac{\Lambda}{4} \operatorname{Re}\left(\frac{\Phi_1}{\Phi^*} \bar{\Gamma} \right) + \frac{\Lambda^2 + 2}{16} \frac{\Phi'^2}{\Phi^{*2}} + \frac{1}{4} \eta^2 B^2 + \frac{1}{2} \operatorname{Re}(i \eta \Psi_1 \bar{\Gamma}), \tag{28a}$$

$$G = \left[\Lambda \frac{\Phi_2}{\Phi^*} - \frac{1}{8} \frac{\Phi_1{}^2}{\Phi^{*2}} - \frac{\Lambda}{2} \frac{\Phi_1}{\Phi^*} \Gamma + i \eta \left(2 \Psi_2 - \frac{1}{2} \Psi_1 \Gamma \right) \right] e^{-2i\chi}, \tag{28b}$$

$$\Pi_\Gamma = \left[\frac{\Lambda}{2} \frac{\Phi_1}{\Phi^*} - \Gamma + i \eta \Psi_1 \right] \left(\frac{\Phi^*}{\Phi_G{}^*} \right)^{1/4} e^{-i\chi}, \tag{28c}$$

$$\Pi_\Delta = \left[\frac{\Lambda}{2} \frac{\Phi_{1\Delta}}{\Phi^*} + \left(-\frac{1}{4} \frac{\Phi_1}{\Phi^*} - \frac{\Lambda}{2} \Gamma \right) \frac{\Phi_\Delta}{\Phi^*} + i \eta \Psi_{1\Delta} \right] \left(\frac{\Phi^*}{\Phi_G{}^*} \right)^{1/4} e^{-i\chi}, \tag{28d}$$

$$\Pi_\varepsilon = \left[-\frac{1}{4} \frac{\Phi_1}{\Phi^*} - \frac{\Lambda}{2} \Gamma \right] \frac{\Phi_G}{\Phi^*} \varepsilon \left(\frac{\Phi^*}{\Phi_G{}^*} \right)^{1/4} e^{-i\chi}, \tag{28e}$$

$$\Sigma = \frac{1}{\sqrt{\Phi_G{}^*}} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{U}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{\partial}{\partial \bar{U}'} \right) \sigma = \frac{e^{-i\chi}}{(\Phi_G{}^* \Phi^*)^{1/4}} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{w}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{\partial}{\partial \bar{w}'} \right) \sigma = s \left(\frac{\Phi^*}{\Phi_G{}^*} \right)^{1/4} e^{-i\chi}. \tag{28f}$$

Die Bedingung (25) entspricht $\Pi_\Gamma = 0$. Wie bereits in der Einleitung erwähnt, hat man mit $\Pi_\Gamma \neq 0$ die Möglichkeit, als Bezugsraumkurve eine Nicht-Elektronenbahn zu verwenden. Dies kann bei Störungsrechnungen, z. B. bei Randfeldfokussierung von Spektrometern günstig sein. Sowohl im w- als auch im U-Koordinatensystem ist die Gaußsche Bahngleichung ($\sigma = s = \Sigma = 0$) eine komplexe, lineare und inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung. Die homogene Gleichung ($\Pi_\Gamma = \Pi_\Delta = \Pi_\varepsilon = 0$) hat wie bei gerader Achse [50] vier beliebige linear unabhängige Grundlösungen w_ν bzw. U_ν. Hat man außer diesen Grundlösungen noch eine partikuläre Lösung $U_\Gamma + U_\Delta + \varepsilon U_\varepsilon$ der inhomogenen Gaußschen Differentialgleichung bestimmt, so kennt man die allgemeine Lösung der Gaußschen Bahn:

$$U_u = \sum_{\nu=1}^{4} K_\nu U_\nu + U_\Gamma + U_\Delta + \varepsilon U_\varepsilon ,$$
$$w_u = \sum_{\nu=1}^{4} K_\nu w_\nu + w_\Gamma + w_\Delta + \varepsilon w_\varepsilon \tag{29}$$

mit den willkürlichen reellen Konstanten

$$K_\nu = \bar{K}_\nu \,. \tag{29a}$$

Die Grundlösungen der homogenen Gaußschen Differentialgleichung erfüllen die (sechs) Helmholtzschen Sätze

$$\operatorname{Re}\{\bar{U}_\mu U_\nu' - U_\mu' \bar{U}_\nu\} = \sqrt{\frac{\Phi^*}{\Phi_G{}^*}} \operatorname{Re}\{\bar{w}_\mu w_\nu' - w_\mu' \bar{w}_\nu - 2 i \chi' \bar{w}_\mu w_\nu\} = C_{\mu\nu} = \bar{C}_{\mu\nu} = -C_{\nu\mu} \tag{30}$$

mit

$$C_{\mu\nu}' = 0 \quad \text{und} \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4 \,.$$

Mit Hilfe von (30) lassen sich Relationen zwischen den vier Grundlösungen gewinnen, die später für die Bildfehlertheorie von Nutzen sind:

$$\sum_{(P)} (-)^P U_\mu \bar{U}_\nu' \bar{U}_\sigma U_\tau' = \sum_{(P)} (-)^P C_{\mu\nu} \bar{U}_\sigma U_\tau' = \frac{\Phi^*}{\Phi_G{}^*} \sum_{(P)} (-)^P w_\mu \bar{w}_\nu' \bar{w}_\sigma w_\tau' = \sqrt{\frac{\Phi^*}{\Phi_G{}^*}} \sum_{(P)} (-)^P C_{\mu\nu} \bar{w}_\sigma w_\tau' = \tfrac{1}{2} \sum_{(P)} (-)^P C_{\mu\nu} C_{\sigma\tau} = D \,, \tag{31a}$$

$$\sum_{(P)} (-)^P C_{\mu\nu} U_\sigma' \bar{U}_\tau' = 0 \,, \tag{31b}$$

$$\sum_{(P)} (-)^P C_{\mu\nu} w_\sigma' \bar{w}_\tau' = -2 i \sqrt{\frac{\Phi_G{}^*}{\Phi^*}} \chi' D \,, \tag{31c}$$

$$\sum_{(P)} (-)^P C_{\mu\nu} U_\sigma' U_\tau' = \sum_{(P)} (-)^P C_{\mu\nu} w_\sigma' w_\tau' = 0, \tag{31d}$$

$$\sum_{(P)} (-)^P C_{\mu\nu} U_\sigma U_\tau = \sum_{(P)} (-)^P C_{\mu\nu} w_\sigma w_\tau = 0, \tag{31e}$$

$$\sum_{(P)} (-)^P C_{\mu\nu} U_\sigma \bar{U}_\tau = \sum_{(P)} (-)^P C_{\mu\nu} w_\sigma \bar{w}_\tau = 0, \tag{31f}$$

$$\sum_{(P)} (-)^P C_{\mu\nu} U_\sigma U_\tau' = \sum_{(P)} (-)^P C_{\mu\nu} w_\sigma w_\tau' = 0. \tag{31g}$$

Summiert wird über alle 24 Permutationen P der vier Indizes μ, ν, σ und τ *. Da die $C_{\mu\nu}$ reell und

* Der Wert der Summe von (31c) wurde in [50] fälschlicherweise mit Null angegeben.

von z unabhängig sind, hat die Determinante D diese Eigenschaften ebenfalls. D ist mit der Wronskischen Determinante W durch $W = -DG^2$ mit G aus (28 b) verknüpft.

Bei Kenntnis der vier Grundlösungen U_ν ($\nu = 1, 2, 3, 4$) der homogenen Gaußschen Bahngleichung kann man eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung durch Variation der Konstanten bestimmen:

$$U_\Gamma + U_\Delta + \varepsilon U_\varepsilon = -\frac{2}{D} \sum_{(\mathrm{P})} (-)^{\mathrm{P}} C_{\mu\nu} U_\sigma \cdot \mathrm{Re} \int_{z_\tau}^{z} \bar{U}_\tau (\Pi_\Gamma + \Pi_\Delta + \Pi_\varepsilon) \, \mathrm{d}z. \quad (32)$$

Für die w-Koordinate gilt

$$w_\Gamma + w_\Delta + \varepsilon w_\varepsilon = -\frac{2}{D \, \Phi_{\mathrm{G}}^{*1/4}} \sum_{(\mathrm{P})} (-)^{\mathrm{P}} \cdot C_{\mu\nu} w_\sigma \, \mathrm{Re} \int_{z_\tau}^{z} \bar{w}_\tau (\Pi_\Gamma + \Pi_\Delta + \Pi_\varepsilon) \, \Phi^{*1/4} e^{i\chi} \, \mathrm{d}z. \quad (32\mathrm{a})$$

Die Funktionen Π_Γ, Π_Δ und Π_ε dürfen von der Gesamt-Bahnstörung abgespalten und getrennt behandelt werden, da sie nur von z, nicht von $w, \bar{w}, w'$ usw. abhängen. Deshalb ändern sich die Bahnbeiträge w_Γ, w_Δ und w_ε bei der Lösung der strengen Bahngleichung durch sukzessive Approximation (s. nächstes Kapitel) nicht mehr. Σ (bzw. s) enthält noch weitere Glieder, die ausschließlich von z abhängen. Da diese jedoch zu Bildfehlern von mindestens zweiter Stufe führen, wurden sie nicht getrennt behandelt.

Wird der Strahlengang durch eine Aperturblende in der Ebene $z = z_{\mathrm{A}}$ begrenzt, so ist es vorteilhaft, als Grundlösungen der homogenen Gaußschen Differentialgleichung die Hauptbahnen w_α, w_β, w_γ und w_δ zu verwenden. Sie haben in der Gegenstandsebene z_{G} bzw. der Aperturblendenebene z_{A} die folgenden Achsenabstände und Neigungen:

$$\begin{aligned} &w_{\alpha\mathrm{G}} = w_\alpha(z_{\mathrm{G}}) = w_{\beta\mathrm{G}} = 0\,, \\ &|w_{\gamma\mathrm{G}}| = |w_{\delta\mathrm{G}}| = 1\,, \\ &|w'_{\alpha\mathrm{G}}| = |w'_{\beta\mathrm{G}}| = 1/\sin\Theta_{\mathrm{G}}\,, \\ &w_{\gamma\mathrm{A}} = w_{\delta\mathrm{A}} = 0\,. \end{aligned} \quad (33)$$

$\Theta_{\mathrm{G}} = \Theta(z_{\mathrm{G}})$ ist der Winkel, den die beiden Abbildungsschnitte in der Objektebene und die beiden Objektgeraden bei astigmatischer Abbildung im allgemeinen miteinander einschließen:

$$w_{\delta\mathrm{G}} = e^{i\Theta_{\mathrm{G}}} w_{\gamma\mathrm{G}}\,, \quad w'_{\beta\mathrm{G}} = -e^{-i\Theta_{\mathrm{G}}} w'_{\alpha\mathrm{G}}\,. \quad (34)$$

Definitionsgemäß werden die beiden i.a. gewundenen Abbildungsschnitte von den Bahnen w_α und w_β, die von der Objektmitte starten, aufgespannt. Die prinzipiellen Betrachtungen zu den Abbildungsschnitten und den Hauptbahnen bei gerader Achse aus [54, 50] und [62] lassen sich direkt auf Systeme mit gekrümmter Achse übertragen, da die homogene Gaußsche Bahngleichung (für $\Delta\Phi_c = 0$) dieselbe Form hat; wir verweisen daher auf diese Arbeiten.

Die (sechs unabhängigen) Konstanten der Helmholtzschen Sätze und die Determinante D nehmen die Werte

$$\begin{aligned} &C_{\alpha\gamma} = C_{\beta\delta} = -1\,, \\ &C_{\alpha\beta} = C_{\gamma\delta} = C_{\alpha\delta} = C_{\beta\gamma} = 0, \quad D = -4 \end{aligned} \quad (35)$$

an, wenn man außer den Bedingungen (33) und (34) noch

$$\begin{aligned} &w_{\delta\mathrm{G}} = i\, w'_{\alpha\mathrm{G}} \sin\Theta_{\mathrm{G}}\,, \\ &w_{\gamma\mathrm{G}} = -i\, w'_{\beta\mathrm{G}} \sin\Theta_{\mathrm{G}} \end{aligned} \quad (36)$$

annimmt. In Systemen mit entkoppelbarer homogener Gaußscher Bahngleichung (orthogonal systems) ist durchgehend $\Theta(z) = \Theta_{\mathrm{G}} = \pi/2$. Damit wird

$$w_{\gamma\mathrm{G}} = w'_{\alpha\mathrm{G}} = 1\,, \quad w_{\delta\mathrm{G}} = w'_{\beta\mathrm{G}} = i\,. \quad (37)$$

Notwendige und hinreichende Bedingung für Entkoppelbarkeit der homogenen Gaußschen Differentialgleichung ist wie bei gerader Achse [54, 50]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{G}{\bar{G}}\right) = 0, \quad \text{d.h.} \quad \arg G = \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{G}{\bar{G}}\right) = \text{const.} \quad (38)$$

Das partikuläre Integral (32) der inhomogenen Gaußschen Bahngleichung vereinfacht sich mit den Konstanten von Gl. (35) für ein System mit Blende zu

$$\begin{aligned} U_\Gamma + U_\Delta + \varepsilon U_\varepsilon = {} & U_\alpha \, \mathrm{Re} \int_{z_{\mathrm{A}}}^{z} \bar{U}_\gamma (\Pi_\Gamma + \Pi_\Delta + \Pi_\varepsilon) \, \mathrm{d}z \\ & - U_\gamma \, \mathrm{Re} \int_{z_{\mathrm{G}}}^{z} \bar{U}_\alpha (\Pi_\Gamma + \Pi_\Delta + \Pi_\varepsilon) \, \mathrm{d}z \\ & + U_\beta \, \mathrm{Re} \int_{z_{\mathrm{A}}}^{z} \bar{U}_\delta (\Pi_\Gamma + \Pi_\Delta + \Pi_\varepsilon) \, \mathrm{d}z \\ & - U_\delta \, \mathrm{Re} \int_{z_{\mathrm{G}}}^{z} \bar{U}_\beta (\Pi_\Gamma + \Pi_\Delta + \Pi_\varepsilon) \, \mathrm{d}z\,; \end{aligned} \quad (39)$$

dabei wurden als untere Integrationsgrenzen von (32) $z_\alpha = z_\beta = z_{\mathrm{G}}$ und $z_\gamma = z_\delta = z_{\mathrm{A}}$ gewählt.

5. Die Integralgleichung

Durch Variation der Konstanten haben wir im vorigen Kapitel ein partikuläres Integral der inhomogenen Gaußschen Bahngleichung erhalten. Mit der gleichen Methode kann man die exakte Bahngleichung (28) mit $\Sigma \neq 0$ in eine Integralgleichung verwandeln:

$$U = U_u - \frac{2}{D} \sum_{(\mathrm{P})} (-)^{\mathrm{P}} C_{\mu\nu} U_\sigma \operatorname{Re} \int_{z_\tau}^{z} \bar{U}_\tau \Sigma \, \mathrm{d}z . \quad (40)$$

Genau wie in [50] läßt sich diese nichtlineare Integrodifferentialgleichung zweiter Art durch Einsetzen von Σ aus (28f) und partielle Integrationen so umformen, daß der Integrand U'' und $\bar{U}''$ nicht mehr enthält. Die Gleichung läßt sich dann durch sukzessive Approximation lösen und man erhält als Ergebnis (im w-System):

$$w = w_0 + \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta w_\nu . \quad (41)$$

Den Beitrag Δw_ν des $(\nu+1)$ten Näherungsschritts bezeichnet man nach [50] als Kombinationsfehler ν-ten Grades. In (41) ist w_0 die nullte Näherung, die sich von w_u durch ein von der partiellen Integration herrührendes Glied unterscheidet:

$$w_0 = w_u - \frac{2}{\mathrm{D}\sqrt{\Phi_{\mathrm{G}}{}^*}} \sum_{(\mathrm{P})} (-)^{\mathrm{P}} C_{\varkappa\lambda} w_\mu \cdot \operatorname{Re} \left\{ w_\nu \frac{\partial \sigma}{\partial w'} \right\}_{z=z_\nu} . \quad (42)$$

Das Zusatzglied in (42) genügt selbst der homogenen Gaußschen Bahngleichung, so daß man

$$w_0 = \sum_{\nu=1}^{4} a_\nu w_\nu + w_\Gamma + w_\Delta + \varepsilon w_\varepsilon \quad (43)$$

mit reellen Konstanten $a_\nu = \bar{a}_\nu$ schreiben kann. Für ein System mit Aperturblende verschwindet die Summe in (42) und es gilt $w_0 = w_u$ bzw. $K_\nu = a_\nu$.

Für den Kombinationsfehler nullten Grades (primary aberrations) und den Kombinationsfehler ersten Grades (secondary aberrations) erhält man wie bei gerader Achse [54]:

$$\Delta w_0 = -\frac{1}{D\sqrt{\Phi_{\mathrm{G}}{}^*}} \sum_{(\mathrm{P})} (-)^{\mathrm{P}} C_{\varkappa\lambda} w_\mu \int_{z_\nu}^{z} \frac{\partial \sigma_0}{\partial a_\nu} \mathrm{d}z , \quad (44)$$

$$\Delta w_1 = \frac{1}{D\sqrt{\Phi_{\mathrm{G}}{}^*}} \sum_{(\mathrm{P})} (-)^{\mathrm{P}} C_{\varkappa\lambda} w_\mu \frac{\partial}{\partial a_\nu} \int_{z_\nu}^{z} \frac{1}{\sqrt{\Phi^*}} \left| \frac{\partial \sigma_0}{\partial w_0{}'} \right|^2 \mathrm{d}z + \frac{1}{D^2 \Phi_{\mathrm{G}}{}^*} \sum_{(\mathrm{P})} (-)^{\mathrm{P}} C_{\varkappa\lambda} w_\mu \int_{z_\nu}^{z} \left\{ \sum_{(\mathrm{P}_1)} (-)^{\mathrm{P}_1} C_{\pi\varrho} \frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial a_\nu \partial a_\sigma} \int_{z_\tau}^{z} \frac{\partial \sigma_0}{\partial a_\tau} \mathrm{d}z \right\} \mathrm{d}z , \quad (45)$$

wobei $\sigma_0 = \sigma(w_0, \bar{w}_0, w_0{}', \bar{w}_0{}', z)$ bedeutet, und der Wirkungsbereich der Permutationen P und P_1 durch $P(\varkappa\,\lambda\,\mu\,\nu)$, $P_1(\pi\,\varrho\,\sigma\,\tau)$ erklärt ist.

Im Unterschied zur geraden Achse sind in Δw_0 bei gekrümmter Achse bereits zweifach geschachtelte Integrale und in Δw_1 dreifach geschachtelte Integrale enthalten, da w_0 nach (32a) bereits die integralen Ausdrücke w_Γ, w_Δ und $\varepsilon w_\varepsilon$ enthält. In Δw_0 sind — nebst Fehlern höherer Stufe — sämtliche Bildfehler 2. Stufe enthalten, entsprechend in $\Delta w_0 + \Delta w_1$ alle Bildfehler 3. Stufe. Die Potenz von ε nennt man oft den Grad des Farbfehlers. Leider spricht man auch bei den Kombinationsfehlern vom Grad, meint aber dort die um 1 verminderte Potenz von σ_0.

Würde man die Eikonalanteile F_{11c} und f_{11} nicht in die Gaußsche Dioptrik sondern in die Bahnstörung σ einbeziehen, so benötigte man für die Berechnung der Farbfehler bzw. Justierfehler einer bestimmten Stufe höhere Kombinationsfehler, d.h. einen Näherungsschritt mehr zur Lösung der Integralgleichung als bei der hier verwendeten Verfahrensweise.

6. Die Bildfehler 2. Stufe

Für ein elektronenoptisches System mit Blende erhält man aus Gl. (44) bei Beachtung von (35) den Bildfehler 2. Stufe zu

$$\Delta w^{(2)} = \Delta w_0{}^{(2)} = \frac{1}{2\sqrt{\Phi_{\mathrm{G}}{}^*}} \left\{ \left(w_\alpha \frac{\partial}{\partial a_\gamma} + w_\beta \frac{\partial}{\partial a_\delta} \right) \cdot \int_{z_{\mathrm{A}}}^{z} \sigma^{(2)}(w_0) \, \mathrm{d}z - \left(w_\gamma \frac{\partial}{\partial a_\alpha} + w_\delta \frac{\partial}{\partial a_\gamma} \right) \int_{z_{\mathrm{G}}}^{z} \sigma^{(2)}(w_0) \, \mathrm{d}z \right\}$$

mit

$$\sigma^{(2)}(w_0) = [F_{3g} + F_{12c} + F_{21c} + f_{12} + f_{21} + f_{111c}]_{w=w_0} . \quad (46)$$

Der Eikonalanteil $F_{3g}(w_0)$ enthält sechs Glieder mit einfachen und zweifachen Ableitungen von Multipolkoeffizienten, was für die Auswertung der Bildfehlerintegrale unvorteilhaft ist. Durch partielle Integrationen wälzt man die Ableitungen von $\Phi_1{}''$,

Ψ_1' und Γ' auf die Bahnen oder das Achsenpotential über. Die dabei entstehenden zweiten Ableitungen w_0'' und $\bar{w}_0''$ werden mit Hilfe der Gaußschen Bahngleichung (24) (mit $s=0$) ersetzt. Die nur in Produkten mit Φ_1 oder Γ verbleibenden Ableitungen Φ'' und B' müssen wir in Kauf nehmen, da wir die Ableitungen von Φ_1, Ψ_1 und Γ vermeiden möchten. Der Eikonalanteil $F_{21c}(w_0)$ für den Farbfehler enthält ein Glied mit Φ'', das ebenfalls unter Verwendung der Gaußschen Bahngleichung zweimal partiell integriert wird. Weitere partielle Integrationen werden bei zwei Gliedern in f_{21} ausgeführt. Als Ergebnis erhalten wir dann ein Störungsintegral, das für die Bildfehlerauswertung günstig ist:

$$
\begin{aligned}
W_\nu{}^{(2)}(z) &= \frac{1}{2\sqrt{\Phi_G{}^*}} \int_{z_\nu}^{z} \sigma^{(2)}(w_0)\,\mathrm{d}z \\
&= \Biggl[\sqrt{\frac{\Phi^*}{\Phi_G{}^*}}\,\mathrm{Re}\Biggl\{\frac{\Lambda}{16}\frac{\Phi_1}{\Phi^*}(2\bar{w}_0' w_0 \bar{w}_0 + w_0' \bar{w}_0^2) + \frac{1}{8} i\eta\Psi_1 (2\bar{w}_0' w_0 \bar{w}_0 - w_0' \bar{w}_0^2) \\
&\quad + \left(-\frac{\Lambda}{16}\frac{\Phi_1'}{\Phi^*} - \frac{1}{32}\frac{\Phi_1\Phi'}{\Phi^{*2}} - \frac{\Lambda}{16}\frac{\Phi'}{\Phi^*}\Gamma\right) w_0 \bar{w}_0^2 + \frac{1}{16}\frac{\Phi'\Delta\Phi_c}{\Phi^{*2}} w_0 \bar{w}_0 \\
&\quad + \left(-\frac{\Lambda}{8}\frac{\Phi_\Delta'}{\Phi^*} + \frac{1}{16}\frac{\Phi'\Phi_\Delta}{\Phi^{*2}}\right) w_0 \bar{w}_0\Biggr\}\Biggr]_{z_\nu}^{z} \\
&\quad + \int_{z_\nu}^{z} \sqrt{\frac{\Phi^*}{\Phi_G{}^*}}\,\mathrm{Re}\Biggl\{\biggl[-\frac{\Lambda}{8}\frac{\Phi_1}{\Phi^*} - \frac{1}{4} i\eta\Psi_1\biggr] \bar{w}_0'^2 w_0 + \frac{1}{2}\Gamma w_0' \bar{w}_0' \bar{w}_0 \\
&\quad + \biggl[\frac{\Lambda^2+2}{32}\frac{\Phi_1\Phi'}{\Phi^{*2}} + \frac{\Lambda}{16}\frac{\Phi'}{\Phi^*}\Gamma - \frac{1}{8}\eta^2\Psi_1 B\biggr](2\bar{w}_0' w_0 \bar{w}_0 + w_0' \bar{w}_0^2) \\
&\quad + i\eta\biggl[\frac{\Lambda}{16}\frac{\Phi_1}{\Phi^*} B - \frac{1}{8} B\Gamma + \frac{\Lambda}{16}\frac{\Phi'}{\Phi^*}\Psi_1\biggr](2\bar{w}_0' w_0 \bar{w}_0 - w_0' \bar{w}_0^2) \\
&\quad + \biggl[\frac{\Lambda}{2}\frac{\Phi_3}{\Phi^*} - \frac{\Lambda^2+2}{16}\frac{\Phi_2\Phi_1}{\Phi^{*2}} - \frac{\Lambda}{4}\frac{\Phi_2}{\Phi^*}\Gamma + \frac{3\Lambda}{128}\frac{\Phi_1^3}{\Phi^{*3}} + \frac{\Lambda^2+1}{32}\frac{\Phi_1^2}{\Phi^{*2}}\Gamma \\
&\quad + \eta^2\left(-\frac{1}{4}\Psi_2\Psi_1 + \frac{1}{16}\Psi_1^2\Gamma\right) + i\eta\biggl(\Psi_3 + \frac{\Lambda}{8}\frac{\Phi_2}{\Phi^*}\Psi_1 - \frac{\Lambda}{8}\frac{\Phi_1}{\Phi^*}\Psi_2 - \frac{1}{3}\Psi_2\Gamma \\
&\quad - \frac{1}{64}\frac{\Phi_1^2}{\Phi^{*2}}\Psi_1 - \frac{\Lambda}{32}\frac{\Phi_1}{\Phi^*}\Psi_1\Gamma\biggr)\biggr]\bar{w}_0^3 + \biggl[-\frac{\Lambda^2+1}{8}\frac{\Phi_2\bar{\Phi}_1}{\Phi^{*2}} - \frac{\Lambda}{8}\frac{\Phi_2}{\Phi^*}\bar{\Gamma} + \frac{11\Lambda}{128}\frac{\Phi_1^2\bar{\Phi}_1}{\Phi^{*3}} \\
&\quad + \frac{3\Lambda^2}{128}\frac{\Phi_1^2}{\Phi^{*2}}\bar{\Gamma} + \frac{11\Lambda^2+4}{128}\frac{\Phi_1\bar{\Phi}_1}{\Phi^{*2}}\Gamma - \frac{\Lambda}{32}\mathrm{Re}\left(\frac{\Phi_1}{\Phi^*}\bar{\Gamma}\right)\Gamma + \frac{3(\Lambda^2+2)}{64}\frac{\Phi_1\Phi''}{\Phi^{*2}} + \frac{\Lambda}{32}\frac{\Phi''}{\Phi^*}\Gamma \\
&\quad - \frac{3\Lambda}{64}\frac{\Phi_1\Phi'^2}{\Phi^{*3}} - \frac{1}{32}\frac{\Phi'^2}{\Phi^{*2}}\Gamma + \eta^2\left(-\frac{1}{2}\Psi_2\bar{\Psi}_1 - \frac{1}{32}\Psi_1^2\bar{\Gamma} + \frac{5}{32}\Psi_1\bar{\Psi}_1\Gamma - \frac{3}{16}\Psi_1 B'\right) \\
&\quad + i\eta\biggl(\frac{\Lambda}{4}\frac{\Phi_2}{\Phi^*}\bar{\Psi}_1 - \frac{\Lambda}{4}\frac{\bar{\Phi}_1}{\Phi^*}\Psi_2 - \frac{1}{4}\Psi_2\bar{\Gamma} - \frac{1}{32}\frac{\Phi_1^2}{\Phi^{*2}}\bar{\Psi}_1 + \frac{1}{64}\frac{\Phi_1\bar{\Phi}_1}{\Phi^{*2}}\Psi_1 + \frac{\Lambda}{16}\frac{\Phi_1}{\Phi^*}\Psi_1\bar{\Gamma} \\
&\quad - \frac{11\Lambda}{64}\frac{\Phi_1}{\Phi^*}\bar{\Psi}_1\Gamma + \frac{5\Lambda}{64}\frac{\bar{\Phi}_1}{\Phi^*}\Psi_1\Gamma + \frac{1}{16}\mathrm{Re}(\Psi_1\bar{\Gamma})\Gamma + \frac{\Lambda}{32}\frac{\Phi_1}{\Phi^*}B' \\
&\quad + \frac{1}{16}B'\Gamma + \frac{\Lambda}{32}\frac{\Phi''}{\Phi^*}\Psi_1\biggr)\biggr] w_0\bar{w}_0^2 + \left(\frac{\Lambda}{2}\frac{\Phi_1}{\Phi^*} - \Gamma + i\eta\Psi_1\right)\cdot\biggl[\left(-\frac{\Lambda}{16}\frac{\Phi_1}{\Phi^*} + \frac{1}{8}i\eta\Psi_1\right)\bar{w}_0^2 \\
&\quad + \left(-\frac{\Lambda}{8}\frac{\bar{\Phi}_1}{\Phi^*} + \frac{1}{4}i\eta\bar{\Psi}_1\right) w_0\bar{w}_0\biggr] + \frac{\Lambda}{4}\frac{\Phi_\Delta}{\Phi^*} w_0' \bar{w}_0' + \biggl[\frac{\Lambda}{4}\frac{\Phi_\Delta'}{\Phi^*} - \frac{1}{8}\frac{\Phi'\Phi_\Delta}{\Phi^{*2}} - \frac{1}{2}i\eta B_\Delta\biggr]\bar{w}_0' w_0
\end{aligned}
\tag{47}
$$

$$+\left[\frac{\Lambda}{2}\frac{\Phi_{2\Delta}}{\Phi^*}+\left(-\frac{\Lambda^2+4}{32}\frac{\Phi_1}{\Phi^*}-\frac{\Lambda}{4}\Gamma+\frac{\Lambda}{16}i\,\eta\,\Psi_1\right)\frac{\Phi_{1\Delta}}{\Phi^*}\right.$$
$$+\left(-\frac{1}{4}\frac{\Phi_2}{\Phi^*}+\frac{7\Lambda}{64}\frac{\Phi_1^2}{\Phi^{*2}}+\frac{\Lambda^2+4}{32}\frac{\Phi_1}{\Phi^*}\Gamma+i\,\eta\left(-\frac{1}{32}\frac{\Phi_1}{\Phi^*}\Psi_1-\frac{\Lambda}{16}\Psi_1\,\Gamma\right)\right)\frac{\Phi_\Delta}{\Phi^*}$$
$$\left.+i\,\eta\,\Psi_{2\Delta}+\left(-\frac{1}{8}\eta^2\Psi_1+i\,\eta\left(-\frac{\Lambda}{16}\frac{\Phi_1}{\Phi^*}-\frac{1}{4}\Gamma\right)\right)\Psi_{1\Delta}\right]\bar{w}_0^2$$
$$+\left[\left(-\frac{\Lambda^2+2}{16}\frac{\bar{\Phi}_1}{\Phi^*}-\frac{\Lambda}{8}\bar{\Gamma}+\frac{\Lambda}{8}i\,\eta\,\bar{\Psi}_1\right)\frac{\Phi_{1\Delta}}{\Phi^*}-\frac{1}{8}\frac{\Phi'\,\Phi_\Delta'}{\Phi^{*2}}\right.$$
$$+\left(\frac{\Lambda}{8}\frac{\Phi_1\bar{\Phi}_1}{\Phi^{*2}}+\frac{\Lambda^2+1}{16}\frac{\Phi_1}{\Phi^*}\bar{\Gamma}+\frac{3\Lambda}{32}\frac{\Phi'^2}{\Phi^{*2}}+i\,\eta\left(\frac{1}{16}\frac{\bar{\Phi}_1}{\Phi^*}\Psi_1+\frac{\Lambda}{8}\Psi_1\bar{\Gamma}\right)\right)\frac{\Phi_\Delta}{\Phi^*}$$
$$\left.+\left(-\frac{1}{4}\eta^2\Psi_1+i\,\eta\left(-\frac{\Lambda}{8}\frac{\bar{\Phi}_1}{\Phi^*}-\frac{1}{4}\bar{\Gamma}\right)\right)\Psi_{1\Delta}\right]w_0\,\bar{w}_0+\left(\frac{\Lambda}{4}w_0'\,\bar{w}_0'-\frac{1}{8}\frac{\Phi'}{\Phi^*}\bar{w}_0'\,w_0\right.$$
$$+\left[-\frac{1}{4}\frac{\Phi_2}{\Phi^*}+\frac{7\Lambda}{64}\frac{\Phi_1^2}{\Phi^{*2}}+\frac{\Lambda^2+4}{32}\frac{\Phi_1}{\Phi^*}\Gamma+i\,\eta\left(-\frac{1}{32}\frac{\Phi_1}{\Phi^*}\Psi_1-\frac{\Lambda}{16}\Psi_1\,\Gamma\right)\right]\bar{w}_0^2$$
$$\left.+\left[\frac{\Lambda}{8}\frac{\Phi_1\bar{\Phi}_1}{\Phi^{*2}}+\frac{\Lambda^2+1}{16}\frac{\Phi_1}{\Phi^*}\bar{\Gamma}+\frac{3\Lambda}{32}\frac{\Phi'^2}{\Phi^{*2}}+i\,\eta\left(\frac{1}{16}\frac{\bar{\Phi}_1}{\Phi^*}\Psi_1+\frac{\Lambda}{8}\Psi_1\bar{\Gamma}\right)\right]w_0\,\bar{w}_0\right)\frac{\Delta\Phi_c}{\Phi^*}$$
$$+\left[-\frac{1}{4}\frac{\Phi_{1\Delta}\Phi_\Delta}{\Phi^{*2}}+\left(\frac{3\Lambda}{16}\frac{\Phi_1}{\Phi^*}+\frac{1}{8}\Gamma\right)\frac{\Phi_\Delta^2}{\Phi^{*2}}\right]\bar{w}_0$$
$$\left.+\left(\left[-\frac{1}{4}\frac{\Phi_{1\Delta}}{\Phi^*}+\left(\frac{3\Lambda}{8}\frac{\Phi_1}{\Phi^*}+\frac{1}{4}\Gamma\right)\frac{\Phi_\Delta}{\Phi^*}\right]w_0\right)\frac{\Delta\Phi_c}{\Phi^*}+\left(\left[\frac{3\Lambda}{16}\frac{\Phi_1}{\Phi^*}+\frac{1}{8}\Gamma\right]\bar{w}_0\right)\frac{\Delta\Phi_c^2}{\Phi^{*2}}\right\}\mathrm{d}z\,.$$

Setzt man w_0 aus (43) in (47) ein, so erhält man im allgemeinen Fall einen Ausdruck, der sich als Polynom dritten Grades in den a_λ schreiben läßt:

$$\begin{aligned}W_\nu^{(2)}=&\sum_{\lambda\leq\mu\leq\tau=1}^{4}K_{\lambda\mu\tau}\,a_\lambda\,a_\mu\,a_\tau\\&+\sum_{\lambda\leq\mu=1}^{4}(K_{\lambda\mu\Gamma}+K_{\lambda\mu\Delta}+\varepsilon\,K_{\lambda\mu\varepsilon})\,a_\lambda\,a_\mu\\&+\sum_{\lambda=1}^{4}(K_{\lambda\Gamma\Gamma}+K_{\lambda\Delta\Delta}+\varepsilon^2\,K_{\lambda\varepsilon\varepsilon}\\&+K_{\lambda\Gamma\Delta}+\varepsilon\,K_{\lambda\Gamma\varepsilon}+\varepsilon\,K_{\lambda\Delta\varepsilon})\,a_\lambda\,.\end{aligned}\tag{48}$$

Beim Einsetzen treten noch 10 weitere Glieder auf, die keinen Koeffizienten a_λ enthalten; wegen der Differentiation in Gl. (46) verursachen sie jedoch keine Bildfehler. Der Index ν deutet an, daß $W_\nu^{(2)}$ und damit auch die Konstanten $K_{\lambda\mu\tau}$ usw. noch von der unteren Integrationsgrenze z_ν (und natürlich von der Beobachtungsebene z) abhängen.

Für ein bestimmtes ν liefert die erste Summe in (48), die allein von den gewollten Feldern herrührt, maximal 20 unabhängige reelle Fehlerkonstanten. Die zweite Summe enthält jeweils die erste Potenz der durch Γ, Δ, ε gekennzeichneten Störungen; jeder der drei Terme liefert dabei maximal 10 unabhängige reelle Fehlerkonstanten. Die dritte Summe enthält schließlich die Störungen in der zweiten Potenz, wobei jeder Term zu maximal 4 unabhängigen reellen Fehlerkonstanten führt.

7. Systeme mit Einschnittsymmetrie

Bei vielen elektronenoptischen Systemen mit krummer Achse liegt die Bündelachse in einer Ebene (Torsion $\tau=0$) und bezüglich dieses Schnittes (x—z-Schnitt) haben die Potentiale die Symmetrie

$$\varphi(x,-y,z)=\varphi(x,y,z)\,,\qquad \psi(x,-y,z)=-\psi(x,y,z)\,,\tag{49a}$$

woraus

$$\Phi_\nu=\Phi_{\nu c},\quad \Psi_\nu=i\,\Psi_{\nu s},\quad B=0$$

folgt. Bei dieser Symmetrie gilt für die Krümmung der Bündelachse, die auch Elektronenbahn sein möge,

$$\varkappa=\frac{\Lambda}{2}\frac{\Phi_{1c}}{\Phi^*}-\eta\,\Psi_{1s}=\Gamma=\bar{\Gamma}\,,\tag{50}$$

und die Gaußsche Bahngleichung (20) wird entkoppelbar:

$$x'' + \frac{\Lambda}{2}\frac{\Phi'}{\Phi^*}x' + \Big[-\Lambda\frac{\Phi_{2c}}{\Phi^*} + \frac{3\Lambda^2+2}{8}\frac{\Phi_{1c}^2}{\Phi^{*2}} + \frac{\Lambda}{4}\frac{\Phi''}{\Phi^*} - \frac{5\Lambda}{4}\frac{\Phi_{1c}}{\Phi^*}\eta\Psi_{1s} + 2\eta\Psi_{2s} + \eta^2\Psi_{1s}{}^2\Big]x = \left(-\frac{\Lambda^2+1}{4}\frac{\Phi_{1c}}{\Phi^*} + \frac{\Lambda}{2}\eta\Psi_{1s}\right)\frac{\Phi_G}{\Phi^*}\varepsilon, \tag{51}$$

$$y'' + \frac{\Lambda}{2}\frac{\Phi'}{\Phi^*}y' + \Big[\Lambda\frac{\Phi_{2c}}{\Phi^*} - \frac{\Lambda^2}{8}\frac{\Phi_{1c}^2}{\Phi^{*2}} + \frac{\Lambda}{4}\frac{\Phi''}{\Phi^*} + \frac{\Lambda}{4}\frac{\Phi_{1c}}{\Phi^*}\eta\Psi_{1s} - 2\eta\Psi_{2s}\Big]y = 0.$$

Wir haben dabei verschwindende Justierfehler vorausgesetzt. Die Lösung von (51) nimmt für ein System mit Blende dann die einfache Form

$$w_u = w_0 = x_0 + i\,y_0$$

mit

$$\begin{aligned} x_0 &= \tan\alpha\cdot x_\alpha + \gamma\,x_\gamma + \varepsilon\,x_\varepsilon \\ &\approx \alpha\,x_\alpha + \gamma\,x_\gamma + \varepsilon\,x_\varepsilon, \\ y_0 &= \tan\beta\cdot y_\beta + \delta\,y_\delta \approx \beta\,y_\beta + \delta\,y_\delta \end{aligned} \tag{52}$$

an. α und β sind die Aperturwinkel, γ und δ die Achsenabstände in der Gegenstandsebene $z = z_G$.

Aus der Bahn x_ε

$$x_\varepsilon = x_\alpha\int_{z_A}^{z} x_\gamma\,r\,dz - x_\gamma\int_{z_G}^{z} x_\alpha\,r\,dz \tag{53}$$

mit der Abkürzung

$$r = r(z) = \left(-\frac{\Lambda^2+1}{4}\frac{\Phi_{1c}}{\Phi^*} + \frac{\Lambda}{2}\eta\Psi_{1s}\right)\frac{\Phi_G}{\sqrt{\Phi^*\,\Phi_G{}^*}}$$

erhält man die Farbfehlerkonstante 0. Ordnung und 1. Stufe (auch als Dispersion 1. Grades bezeichnet) in der Bildebene z_B ($x_{\alpha B} = x_\alpha(z_B) = 0$) zu

$$C_{F0} = C_{\alpha\varepsilon} = \frac{x_{\varepsilon B}}{x_{\gamma B}} = -\int_{z_G}^{z_B} x_\alpha\,r\,dz. \tag{54a}$$

Hauptsächlich für elektronenmikroskopische Filtersysteme (siehe z. B. [52, 63–70]) benötigt man noch die Dispersion in der Ebene $z = z_S$ (Selektionsebene, $x_{\gamma S} = 0$), die ein Bild der Aperturblendenebene z_A ist:

$$\tilde{C}_{F0} = C_{\gamma\varepsilon} = \frac{x_{\varepsilon S}}{x_{\alpha S}} = \int_{z_A}^{z_S} x_\gamma\,r\,dz. \tag{54b}$$

Die Wirkungsfunktion 2. Stufe — Gl. (47) und (48) — vereinfacht sich im Fall der Einschnittsymmetrie zu

$$\begin{aligned} W_\nu^{(2)} = {} & A_{\alpha\alpha\alpha}\,\alpha^3/3 + B_{\alpha\beta\beta}\,\alpha\,\beta^2/2 \\ & + A_{\alpha\alpha\gamma}\,\alpha^2\,\gamma + B_{\alpha\beta\delta}\,\alpha\,\beta\,\delta + B_{\gamma\beta\beta}\,\beta^2\,\gamma/2 \\ & + A_{\alpha\gamma\gamma}\,\alpha\,\gamma^2 + B_{\gamma\beta\delta}\,\beta\,\gamma\,\delta + B_{\alpha\delta\delta}\,\alpha\,\delta^2/2 \\ & + A_{\gamma\gamma\gamma}\,\gamma^3/3 + B_{\gamma\delta\delta}\,\gamma\,\delta^2/2 \\ & + C_{\alpha\alpha\varepsilon}\,\alpha^2\,\varepsilon/2 + C_{\beta\beta\varepsilon}\,\beta^2\,\varepsilon/2 \\ & + C_{\alpha\gamma\varepsilon}\,\alpha\,\gamma\,\varepsilon + C_{\beta\delta\varepsilon}\,\beta\,\delta\,\varepsilon \\ & + C_{\gamma\gamma\varepsilon}\,\gamma^2\,\varepsilon/2 + C_{\beta\beta\varepsilon}\,\beta^2\,\varepsilon/2 \\ & + C_{\alpha\varepsilon\varepsilon}\,\alpha\,\varepsilon^2 \\ & + C_{\gamma\varepsilon\varepsilon}\,\gamma\,\varepsilon^2, \end{aligned} \tag{55}$$

wobei das Glied mit ε^3 weggelassen wurde, da es keinen Beitrag zu den Bildfehlern liefert. Die 18 reellen Koeffizienten in (55) ergeben sich durch Einsetzen der entsprechenden Indizes aus den folgenden Ausdrücken:

$$\begin{aligned} A_{\lambda\mu\pi} = {} & \left[\sqrt{\frac{\Phi^*}{\Phi_G{}^*}}\left\{(3g_1+g_2)\left(\frac{x_\lambda'}{x_\lambda} + \frac{x_\mu'}{x_\mu} + \frac{x_\pi'}{x_\pi}\right) + 3g_3\right\}x_\lambda\,x_\mu\,x_\pi\right]_{z_\nu}^{z} \\ & + \int_{z_\nu}^{z}\sqrt{\frac{\Phi^*}{\Phi_G{}^*}}\left\{(g_5+g_6)\left(\frac{x_\lambda'\,x_\mu'}{x_\lambda\,x_\mu} + \frac{x_\lambda'\,x_\pi'}{x_\lambda\,x_\pi} + \frac{x_\mu'\,x_\pi'}{x_\mu\,x_\pi}\right) + (3g_7+g_8)\left(\frac{x_\lambda'}{x_\lambda} + \frac{x_\mu'}{x_\mu} + \frac{x_\pi'}{x_\pi}\right)\right. \\ & \left. + 3(g_9+g_{10})\right\}x_\lambda\,x_\mu\,x_\pi\,dz, \end{aligned} \tag{56}$$

$$\begin{aligned} B_{\lambda\sigma\tau} = {} & 2\left[\sqrt{\frac{\Phi^*}{\Phi_G{}^*}}\left\{g_1\left(\frac{x_\lambda'}{x_\lambda} + \frac{y_\sigma'}{y_\sigma} + \frac{y_\tau'}{y_\tau}\right) + g_2\left(3\frac{x_\lambda'}{x_\lambda} - \frac{y_\sigma'}{y_\sigma} - \frac{y_\tau'}{y_\tau}\right) + g_3\right\}x_\lambda\,y_\sigma\,y_\tau\right]_{z_\nu}^{z} \\ & + 2\int_{z_\nu}^{z}\sqrt{\frac{\Phi^*}{\Phi_G{}^*}}\left\{g_5\left(\frac{x_\lambda'\,y_\sigma'}{x_\lambda\,y_\sigma} + \frac{x_\lambda'\,y_\tau'}{x_\lambda\,y_\tau} - \frac{y_\sigma'\,y_\tau'}{y_\sigma\,y_\tau}\right) + g_6\frac{y_\sigma'\,y_\tau'}{y_\sigma\,y_\tau} + g_7\left(\frac{x_\lambda'}{x_\lambda} + \frac{y_\sigma'}{y_\sigma} + \frac{y_\tau'}{y_\tau}\right)\right. \\ & \left. + g_8\left(3\frac{x_\lambda'}{x_\lambda} - \frac{y_\sigma'}{y_\sigma} - \frac{y_\tau'}{y_\tau}\right) - 3g_9 + g_{10}\right\}x_\lambda\,y_\sigma\,y_\tau\,dz, \end{aligned} \tag{57}$$

$$C_{\pi\varrho\varepsilon} = 2A_{\varepsilon\pi\varrho} + 2\left[\sqrt{\frac{\Phi^*}{\Phi_G^*}}\, g_4\, x_\pi\, x_\varrho\right]_{z_\nu}^{z}$$
$$+ 2\int_{z_\nu}^{z}\sqrt{\frac{\Phi^*}{\Phi_G^*}}\left\{g_{11}\frac{x_\pi'\, x_\varrho'}{x_\pi x_\varrho} + \frac{1}{2}g_{12}\left(\frac{x_\pi'}{x_\pi} + \frac{x_\varrho'}{x_\varrho}\right) + g_{13} + g_{14}\right\} x_\pi\, x_\varrho\, \mathrm{d}z\,, \tag{58}$$

$$C_{\pi\varepsilon\varepsilon} = A_{\varepsilon\varepsilon\pi} + 2\left[\sqrt{\frac{\Phi^*}{\Phi_G^*}}\, g_4\, x_\pi\, x_\varepsilon\right]_{z_\nu}^{z} + \int_{z_\nu}^{z}\sqrt{\frac{\Phi^*}{\Phi_G^*}}\, g_{15}\, x_\pi\, \mathrm{d}z$$
$$+ 2\int_{z_\nu}^{z}\sqrt{\frac{\Phi^*}{\Phi_G^*}}\left\{g_{11}\frac{x_\pi'\, x_\varepsilon'}{x_\pi x_\varepsilon} + \frac{1}{2}g_{12}\left(\frac{x_\pi'}{x_\pi} + \frac{x_\varepsilon'}{x_\varepsilon}\right) + g_{13} + g_{14}\right\} x_\pi\, x_\varepsilon\, \mathrm{d}z\,, \tag{59}$$

$$C_{\sigma\tau\varepsilon} = B_{\varepsilon\sigma\tau} + 2\left[\sqrt{\frac{\Phi^*}{\Phi_G^*}}\, g_4\, y_\sigma\, y_\tau\right]_{z_\nu}^{z}$$
$$+ 2\int_{z_\nu}^{z}\sqrt{\frac{\Phi^*}{\Phi_G^*}}\left\{g_{11}\frac{y_\sigma'\, y_\tau'}{y_\sigma y_\tau} + \frac{1}{2}g_{12}\left(\frac{y_\sigma'}{y_\sigma} + \frac{y_\tau'}{y_\tau}\right) - g_{13} + g_{14}\right\} y_\sigma\, y_\tau\, \mathrm{d}z\,. \tag{60}$$

Dabei können die Indizes wie folgt eingesetzt werden:

$$\lambda, \mu = \alpha, \gamma, \varepsilon; \quad \pi, \varrho = \alpha, \gamma; \quad \sigma, \tau = \beta, \delta\,. \tag{60a}$$

Die Abkürzungen g_m stehen für die Funktionen:

$$g_1 = \frac{\Lambda}{16}\frac{\Phi_{1c}}{\Phi^*}\,, \quad g_2 = -\frac{1}{8}\eta\,\Psi_{1s}\,,$$

$$g_3 = -\frac{\Lambda}{16}\frac{\Phi_{1c}'}{\Phi^*} - \frac{\Lambda^2+1}{32}\frac{\Phi_{1c}\Phi'}{\Phi^{*2}} + \frac{\Lambda}{16}\frac{\Phi'}{\Phi^*}\eta\,\Psi_{1s}\,, \quad g_4 = \frac{1}{16}\frac{\Phi'\,\Phi_G}{\Phi^{*2}}\,,$$

$$g_5 = -\frac{\Lambda}{8}\frac{\Phi_{1c}}{\Phi^*} + \frac{1}{4}\eta\,\Psi_{1s}\,, \quad g_6 = \frac{\Lambda}{4}\frac{\Phi_{1c}}{\Phi^*} - \frac{1}{2}\eta\,\Psi_{1s}\,,$$

$$g_7 = \frac{\Lambda^2+1}{16}\frac{\Phi_{1c}\Phi'}{\Phi^{*2}} - \frac{\Lambda}{16}\frac{\Phi'}{\Phi^*}\eta\,\Psi_{1s}\,, \quad g_8 = -\frac{\Lambda}{16}\frac{\Phi'}{\Phi^*}\eta\,\Psi_{1s}\,,$$

$$\begin{aligned} g_9 = {} & \frac{\Lambda}{2}\frac{\Phi_{3c}}{\Phi^*} - \frac{3\Lambda^2+2}{16}\frac{\Phi_{2c}\Phi_{1c}}{\Phi^{*2}} + \frac{\Lambda(2\Lambda^2+5)}{128}\frac{\Phi_{1c}^3}{\Phi^{*3}} \\ & + \eta\left(-\Psi_{3s} + \frac{\Lambda}{8}\frac{\Phi_{2c}}{\Phi^*}\Psi_{1s} + \frac{7\Lambda}{24}\frac{\Phi_{1c}}{\Phi^*}\Psi_{2s} - \frac{\Lambda^2+1}{64}\frac{\Phi_{1c}^2}{\Phi^{*2}}\Psi_{1s}\right) \\ & + \eta^2\left(-\frac{1}{12}\Psi_{2s}\Psi_{1s} - \frac{\Lambda}{16}\frac{\Phi_{1c}}{\Phi^*}\Psi_{1s}^2\right) + \frac{1}{16}\eta^3\Psi_{1s}^3\,, \end{aligned} \tag{61}$$

$$\begin{aligned} g_{10} = {} & -\frac{3\Lambda^2+2}{16}\frac{\Phi_{2c}\Phi_{1c}}{\Phi^{*2}} + \frac{\Lambda(6\Lambda^2+13)}{128}\frac{\Phi_{1c}^3}{\Phi^{*3}} + \frac{2\Lambda^2+3}{32}\frac{\Phi_{1c}\Phi''}{\Phi^{*2}} - \frac{\Lambda}{16}\frac{\Phi_{1c}\Phi'^2}{\Phi^{*3}} \\ & + \eta\left(\frac{3\Lambda}{8}\frac{\Phi_{2c}}{\Phi^*}\Psi_{1s} + \frac{3\Lambda}{8}\frac{\Phi_{1c}}{\Phi^*}\Psi_{2s} - \frac{5(3\Lambda^2+1)}{64}\frac{\Phi_{1c}^2}{\Phi^{*2}}\Psi_{1s} - \frac{\Lambda}{16}\frac{\Phi''}{\Phi^*}\Psi_{1s} + \frac{1}{32}\frac{\Phi'^2}{\Phi^{*2}}\Psi_{1s}\right) \\ & + \eta^2\left(-\frac{3}{4}\Psi_{2s}\Psi_{1s} + \frac{3\Lambda}{8}\frac{\Phi_{1c}}{\Phi^*}\Psi_{1s}^2\right) - \frac{3}{16}\eta^3\Psi_{1s}^3\,, \end{aligned}$$

Tabelle 1

Bildfehler-	Bedeutung der Bildfehler-Koeffizienten für die Abbildung der	
Koeffizienten	Objektebene	Apertur-Blendenebene
$A_{\alpha\alpha\alpha}$, $B_{\alpha\beta\beta}$	Öffnungsfehler (axiale Koma und dreizähliger Astigmatismus)	—
$A_{\alpha\alpha\gamma}$, $B_{\alpha\beta\delta}$, $B_{\gamma\beta\beta}$	Bildfeldneigung und Astigmatismus schiefer Bündel	Verzeichnung
$A_{\alpha\gamma\gamma}$, $B_{\gamma\beta\delta}$, $B_{\alpha\delta\delta}$	Verzeichnung	Bildfeldneigung und Astigmatismus schiefer Bündel
$A_{\gamma\gamma\gamma}$, $B_{\gamma\delta\delta}$	—	Öffnungsfehler (axiale Koma und dreizähliger Astigmatismus)
$C_{\alpha\alpha\varepsilon}$, $C_{\beta\beta\varepsilon}$	chromatische Unschärfe	—
$C_{\alpha\gamma\varepsilon}$, $C_{\beta\delta\varepsilon}$	Farbabhängigkeit der Vergrößerung	Farbabhängigkeit der Vergrößerung
$C_{\gamma\gamma\varepsilon}$, $C_{\delta\delta\varepsilon}$	—	chromatische Unschärfe
$C_{\alpha\varepsilon\varepsilon}$	Dispersion 2. Grades	—
$C_{\gamma\varepsilon\varepsilon}$	—	Dispersion 2. Grades

$$g_{11} = \frac{\Lambda}{4} \frac{\Phi_G}{\Phi^*}, \quad g_{12} = -\frac{1}{8} \frac{\Phi' \Phi_G}{\Phi^{*2}},$$

$$g_{13} = \left(-\frac{1}{4} \frac{\Phi_{2c}}{\Phi^*} + \frac{3\Lambda}{16} \frac{\Phi_{1c}^2}{\Phi^{*2}} + \frac{\Lambda^2 - 4}{32} \frac{\Phi_{1c}}{\Phi^*} \eta \Psi_{1s} - \frac{\Lambda}{16} \eta^2 \Psi_{1s}^2 \right) \frac{\Phi_G}{\Phi^*},$$

$$g_{14} = \left(\frac{3\Lambda}{16} \frac{\Phi_{1c}^2}{\Phi^{*2}} + \frac{3\Lambda}{32} \frac{\Phi'^2}{\Phi^{*2}} - \frac{\Lambda^2 + 3}{16} \frac{\Phi_{1c}}{\Phi^*} \eta \Psi_{1s} + \frac{\Lambda}{8} \eta^2 \Psi_{1s}^2 \right) \frac{\Phi_G}{\Phi^*},$$

$$g_{15} = \left(\frac{\Lambda}{4} \frac{\Phi_{1c}}{\Phi^*} - \frac{1}{8} \eta \Psi_{1s} \right) \frac{\Phi_G^2}{\Phi^{*2}}.$$

Bei stigmatischer Abbildung der Ebene z_G auf die Bildebene z_B erhält man wegen $x_{\alpha B} = y_{\beta B} = 0$ als Bildfehler 2. Stufe aus (55)

$$\Delta x_B{}^{(2)} = -x_{\gamma B} \frac{\partial}{\partial \alpha} W_{G,B}^{(2)},$$

$$\Delta y_B{}^{(2)} = -y_{\delta B} \frac{\partial}{\partial \beta} W_{G,B}^{(2)}. \tag{62}$$

Für astigmatische Abbildung bleibt von diesen beiden Gleichungen nur diejenige gültig, welche den Bildfehler senkrecht zur Bildlinie beschreibt.

Für elektronenmikroskopische Filter sind auch die Bildfehler — hauptsächlich die Öffnungsfehler — in der Selektionsebene z_S wichtig, die man durch

$$\Delta x_S{}^{(2)} = x_{\alpha S} \frac{\partial}{\partial \gamma} W_{A,S}^{(2)},$$

$$\Delta y_S{}^{(2)} = y_{\beta S} \frac{\partial}{\partial \delta} W_{A,S}^{(2)} \tag{63}$$

erhält. Die Bedeutung (und im allgemeinen auch die Zahlenwerte) der einzelnen Bildfehlerkoeffizienten der Entwicklung (55) sind verschieden für die Abbildung von z_G auf z_B und die Abbildung von z_A auf z_S (siehe dazu die Tabelle 1). Bildfehlerfiguren und Diskussion der einzelnen Fehlerkomponenten sind in [49, 71—74] enthalten.

Aufgrund von Symmetrieüberlegungen anhand der Bildfehlerintegrale (56) bis (60) konnte in [70] ein stigmatisch abbildendes elektrostatisches Energiefilter für die Dunkelfeldabbildung im Ruhbild-Elektronenmikroskop vorgeschlagen werden, das keine geometrischen Bildfehler 2. Ordnung in der Bildebene und keine selektionsbegrenzenden Öffnungsfehler in der Energieselektorebene besitzt. Außerdem verschwinden in der Bildebene die Farbfehler C_{F0}, $C_{\alpha\gamma\varepsilon}$, $C_{\beta\delta\varepsilon}$ und $C_{\gamma\varepsilon\varepsilon}$.

Herrn Prof. W. Hoppe danken wir für sein förderndes Interesse an dieser Arbeit.

[1] W. Hoppe, Z. Naturforsch. **27a**, 919 (1972).
[2] D. Typke u. W. Hoppe, Proc. 5th Europ. Congr. Electron. Micros., 212, Manchester 1972.
[3] D. Typke, Vortrag I 1 der 17. Tagung d. dtsch. Ges. f. Elektronenmikroskopie, Berlin 1975.
[4] D. Typke, W. Seßler, M. Burger u. W. Hoppe, Vortrag I 2 der 17. Tagung d. dtsch. Ges. f. Elektronenmikroskopie, Berlin 1975.
[5] D. Typke, W. Hoppe, W. Seßler u. M. Burger, 6th Europ. Congr. Electron Micros. I, 334, Jerusalem 1976.
[6] E. Plies, Vortrag Z 3 der 18. Tagung d. dtsch. Ges. f. Elektronenmikroskopie, Münster 1977.
[7] I. Dietrich, R. Weyl u. H. Zerbst, Cryogenics **7**, 178 (1967).
[8] I. Dietrich, H. Pfisterer u. R. Weyl, Z. angew. Phys. **28**, 35 (1969).
[9] R. Weyl, I. Dietrich u. H. Zerbst, Optik **35**, 280 (1972).
[10] H. Liebl, Adv. Mass. Spectrom. **6**, 535 (1974).
[11] R. Herzog, Z. Phys. **89**, 447 (1934).
[12] R. Wallauschek, Z. Phys. **117**, 565 (1941).
[13] H. Marschall, Phys. Z. **45**, 1 (1944).
[14] W. Glaser, Österr. Ing. Arch. **5**, 354 (1950).
[15] N. Svartholm, Ark. Fys. **2**, 195 (1950).
[16] H. W. Franke, Österr. Ing. Arch. **5**, 371 (1951).
[17] H. Grümm, Acta Phys. Austriaca **8**, 119 (1953).
[18] H. Ewald u. H. Liebl, Z. Naturforsch. **10a**, 872 (1955) und **12a**, 28 (1957).
[19] H. A. Tasman u. A. J. H. Boerboom, Z. Naturforsch. **14a**, 121 (1959).
[20] H. Wachsmuth, A. J. H. Boerboom u. H. A. Tasman, Z. Naturforsch. **14a**, 818 (1959).
[21] H. A. Tasman, A. J. H. Boerboom u. H. Wachsmuth, Z. Naturforsch. **14a**, 822 (1959) und **17a**, 362 (1962).
[22] W. Glaser im Handbuch der Physik, XXXIII, 306—316, Springer, Berlin 1959.
[23] H. Wollnik, Nucl. Instrum. Meth. **34**, 213 (1965).
[24] H. Wollnik u. H. Ewald, Nucl. Instrum. Meth. **36**, 93 (1965).
[25] H. Wollnik, Nucl. Instrum. Meth. **52**, 250 (1967).
[26] R. Ludwig, Z. Naturforsch. **22a**, 553 (1967).
[27] H. A. Enge in A. Septier, Focusing of Charged Particles II, 203, Academic Press, London 1967.
[28] H. Wollnik in A. Septier, Focusing of Charged Particles II, 163, Academic Press, London 1967.
[29] H. Matsuda u. H. Wollnik, Nucl. Instrum. Meth. **77**, 40 (1970).
[30] H. Matsuda u. H. Wollnik, Nucl. Instrum. Meth. **77**, 283 (1970).
[31] T. Matsuo u. H. Matsuda, Int. J. Mass. Spectrom. Ion Phys. **6**, 361 (1971).
[32] H. Matsuda, Nucl. Instrum. Meth. **91**, 637 (1971).
[33] T. Matsuo, H. Matsuda u. H. Wollnik, Nucl. Instrum. Meth. **103**, 515 (1972).
[34] M. Cotte, Ann. Phys. Paris **10**, 333 (1938).
[35] L. A. MacColl, J. Math. Phys. **20**, 355 (1941).
[36] G. A. Grünberg, Dokl. Akad. Nauk SSSR **37**, 172 u. 261 (1942) und **38**, 78 (1943).
[37] G. Wendt, Z. Phys. **120**, 720 (1943).
[38] R. G. E. Hutter, Adv. Electronics **1**, 200 (1948).
[39] P. A. Sturrock, Proc. Roy. Soc. London A **210**, 269 (1951).
[40] P. A. Sturrock, Phil. Trans. A **245**, 155 (1952).
[41] I. I. Tsukkerman, Zh. Tekhn. Fiz. **24**, 258 (1954) (in Russisch).
[42] P. P. Kas'yankov, Opt. Spektrosk. **3**, 169 (1957) (in Russisch).
[43] Yu. V. Vandakurov, Sov. Phys.-Techn. Phys. **2**, 1719 (1957).
[44] G. A. Grünberg, Sov. Phys.-Techn. Phys. **2**, 2259 (1957).
[45] P. P. Kas'yankov, Sov. Phys.-Techn. Phys. **3**, 854 (1958).
[46] W. Glaser im Handbuch der Physik, XXXIII, 169—173 und 296—306, Springer, Berlin 1959.
[47] P. W. Hawkes, Phil. Trans. A **257**, 479 (1965).
[48] E. Plies u. H. Rose, Optik **34**, 171 (1971).
[49] E. Plies, Optik **38**, 502 (1973) und **40**, 141 (1974).
[50] H. Rose, Optik **27**, 466 und 497 (1968).
[51] O. Scherzer, Optik **2**, 114 (1947).
[52] H. Rose, Optik **51**, 15 (1978).
[53] W. E. Meyer, Optik **18**, 69 (1961).
[54] H. Rose, Optik **24**, 36 und 108 (1966/67).
[55] W. Glaser, Z. Phys. **80**, 451 (1933) und **81**, 647 (1933).
[56] G. D. Archard, Brit. J. Appl. Phys. **5**, 294 (1954).
[57] G. D. Archard, Proc. Phys. Soc. London B **68**, 156 (1955).
[58] H. Rose, Optik **33**, 1 (1971).
[59] H. Rose, Optik **34**, 285 (1971).
[60] R. W. Moses, Proc. Roy. Soc. London A **339**, 483 (1974).
[61] H. Koops, G. Kuck u. O. Scherzer, Optik **48**, 225 (1977).
[62] O. Scherzer, Optik **22**, 314 (1965).
[63] R. Castaing et L. Henry, J. Microscopie **3**, 133 (1964).
[64] H. Rose u. E. Plies, Optik **40**, 336 (1974) und **47**, 365 (1977).
[65] G. Zanchie, J. Ph. Perez u. J. Seveley, Optik **43**, 495 (1975).
[66] H. Wollnik, T. Matsuo u. E. Kasseckert, Optik **46**, 255 (1976).
[67] H. T. Pearce-Percy, D. Krahl u. J. Jaeger, 6th Europ. Congr. Electron Micros. I, 348, Jerusalem 1976.
[68] D. Krahl, K.-H. Herrmann u. W. Kunath, 9th Intern. Congr. Electron Micros. 42, Toronto 1978.
[69] W. Pejas u. H. Rose, 9th Intern. Congr. Electron Micros. 44, Toronto 1978.
[70] E. Plies, 9th Intern. Congr. Electron Micros. 50, Toronto 1978.
[71] G. Slodzian, Ann. Phys. Paris **9**, 591 (1964).
[72] R. Castaing, J. F. Hennequin, L. Henry u. G. Slodzian in A. Septier, Focusing of Charged Particles II, 265, Academic Press, London 1967.
[73] M. Leleyter et G. Slodzian, Rev. Phys. Appl. **6**, 65 (1971).
[74] H. Rose u. E. Plies in P. W. Hawkes, Image Processing and Computer-Aided Design in Electron Optics, 344, Academic Press, London 1973.